

Catalanova čísla, Fibonachiho čísla, AVL-stromy

Jan Konečný

10. listopadu 2014

Počet stromů o 0 uzlech: 1

$\emptyset$

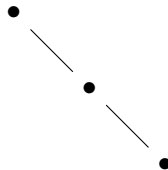
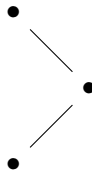
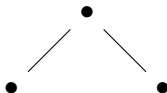
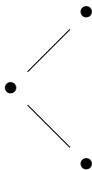
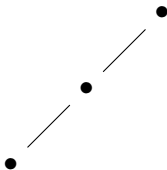
Počet stromů o 1 uzlu: 1



Počet stromů o 2 uzlech: 2



Počet stromů o 3 uzlech: 5



Počet stromů o 5 uzlech:

Kolik je binárních vyhledávacích stromů?

$$C_1 = C_0 C_0$$

$$C_2 = C_1 C_0 + C_0 C_1$$

$$C_3 = C_2 C_0 + C_1 C_1 + C_0 C_2$$

$$C_4 = C_3 C_0 + C_2 C_1 + C_1 C_2 + C_0 C_3$$

$\vdots$

$$C_n = C_{n-1} C_0 + C_{n-2} C_1 + \cdots + C_1 C_{n-2} + C_0 C_{n-1}$$

1, 1, 2, 5, 14, 42, 132, 429, 1430, 4862, 16796, 58786, 208012,
742900, 2674440, 9694845, 35357670, 129644790, 477638700,
1767263190, 6564120420, 24466267020, 91482563640,
343059613650, 1289904147324, ...

tzv. Catalanova čísla

Explicitní vzorec pro Catalanova čísla

Generující polynom

Definujeme polynom

$$f(z) = C_0 + C_1z + C_2z^2 + C_3z^3 + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} C_i z^i$$

obsahující všechna Catalanova čísla jako koeficienty.

uvažujme druhou mocninu $f(z)$:

$$\begin{aligned}[f(z)]^2 &= C_0 C_0 && (= C_1) \\ &+ (C_1 C_0 + C_0 C_1)z && (= C_2 z) \\ &+ (C_2 C_0 + C_1 C_1 + C_0 C_2)z^2 && (= C_3 z^2) \\ &+ \dots\end{aligned}$$

Tedy

$$[f(z)]^2 = C_1 + C_2 z + C_3 z^2 + C_4 z^3 + \dots$$

Když předchozí rovnici vynásobíme z a přičteme C_0 :

$$f(z) = C_0 + z[f(z)]^2$$

Rovnice

$$f(z) = C_0 + z[f(z)]^2$$

je pouze kvadratická rovnice v $f(z)$, můžeme ji řešit známým způsobem:

$$zf^2 - f + C_0 = 0.$$

Dostaneme

$$f(z) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

Použijeme jenom $-$ namísto $\pm$, protože víme, že $f(0) = C_0 = 1$.
(kdybychom použili $+$, pak pro $z \rightarrow 0$ je $f(z) \rightarrow \infty$)

Pro vyjádření $f(z)$ použijeme (zobecněný) binomický rozklad na

$$\sqrt{1-4z} = (1-4)^{1/2}$$

$$\begin{aligned}(a+b)^n &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k \\ &= a^n + \frac{n}{1} a^{n-1} b + \frac{n(n-1)}{2 \cdot 1} a^{n-2} b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} a^{n-3} b^3 + \dots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - 4z)^{1/2} = & 1 \\
 & - \frac{\frac{1}{2}}{1} 4z \\
 & + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})}{2 \cdot 1} (4z)^2 \\
 & - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{3 \cdot 2 \cdot 1} (4z)^3 \\
 & + \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (4z)^4 \\
 & - \frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})(-\frac{7}{2})}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} (4z)^5 \\
 & - \dots
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (1 - 4z)^{1/2} = & 1 \\
 & - \frac{1}{1!} 2z \\
 & - \frac{1}{2!} 4z^2 \\
 & - \frac{3 \cdot 1}{3!} 8z^3 \\
 & - \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!} 16z^4 \\
 & - \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{5!} 32z^5 \\
 & - \dots
 \end{aligned}$$

Dosadíme do

$$f(z) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4z}}{2z}$$

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2!}2z + \frac{3 \cdot 1}{3!}4z^2 + \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{4!}8z^3 + \frac{7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1}{5!}16z^4 + \dots$$

Nepohodlných součinů typu $7 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 1$ se zbavíme následovně.
Všimněme si, že:

$$2^2 \cdot 2! = 4 \cdot 2$$

$$2^3 \cdot 3! = 6 \cdot 4 \cdot 2$$

$$2^4 \cdot 4! = 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2.$$

atd. Tedy

$$\begin{aligned} f(z) &= 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2!}{1!1!} \right) z + \frac{1}{3} \left(\frac{4!}{2!2!} \right) z^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{6!}{3!3!} \right) z^3 + \frac{1}{5} \left(\frac{8!}{4!4!} \right) z^4 \dots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} z^i. \end{aligned}$$

Z tohoto

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i} z^i$$

tedy dostáváme explicitní vzorec pro Catalanova čísla:

$$C_i = \frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$$

Binárních vyhledávacích stromů o i uzlech je tedy $\frac{1}{i+1} \binom{2i}{i}$.

Catalanův trojúhelník

1

1

1

1

2

2

1

3

5

5

1

4

9

14

14

1

5

14

28

42

42

1

6

20

48

90

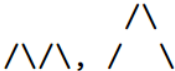
132

132

Další významy Catalanových čísel – závorky

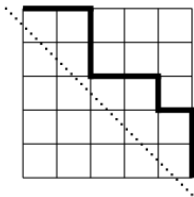
$n = 0$:	*
$n = 1$:	()
$n = 2$:	()(), (())
$n = 3$:	()()(), ()(), (())(), (()), ((()))
$n = 4$:	()()()(), ()()(), ()()(), ()()(), ()((())), ()()(), ()()(), ()()(), ((()))(), (())(), ()((())), ((())()), ((()())), (((())))
$n = 5$:	()()()()(), ()()()(), ()()()(), ()()()(), ()()((())), ()()()(), ()()()(), ()()()(), ()((()))(), ()()()(), ()()()(), ()((()))(), ()((()))(), ()(((()))), ()()()(), ()()()(), ()()()(), ()()()(), ()()((())), ()()()(), ()()()(), ((()))()(), ((()))(), ()()()(), ()()()(), ((())()(), ((())()(), (((()))()(), ()()()(), ()()()(), ()()()(), ()()()(), ()((()))(), ((())()(), ((())()(), (((())()(), (((()))()(), ((()()()(), ((()()()(), (((())()(), (((())()(), (((()))()(), (((()))()(), (((()))()(), (((()))()(), ((((()))))

Další významy Catalanových čísel – pohoří

$n = 0$:	*
$n = 1$:	/\
$n = 2$:	
$n = 3$:	

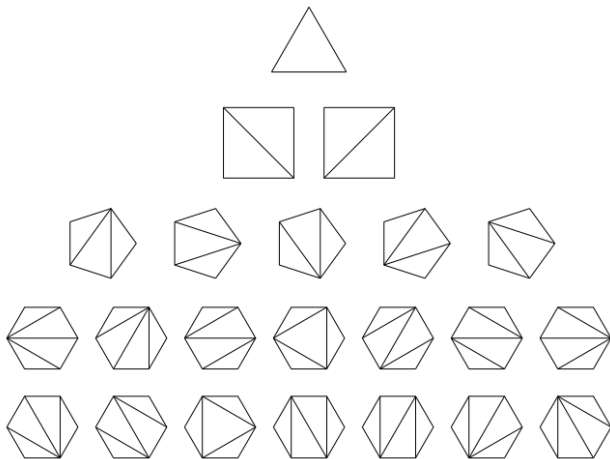
Další významy Catalanových čísel – naddiagonální cesty

V mřížce $n \times n$, kolik existuje cest délky $2n$ z levého horního rohu do pravého dolního rohu, které jsou na nebo nad diagonálou?



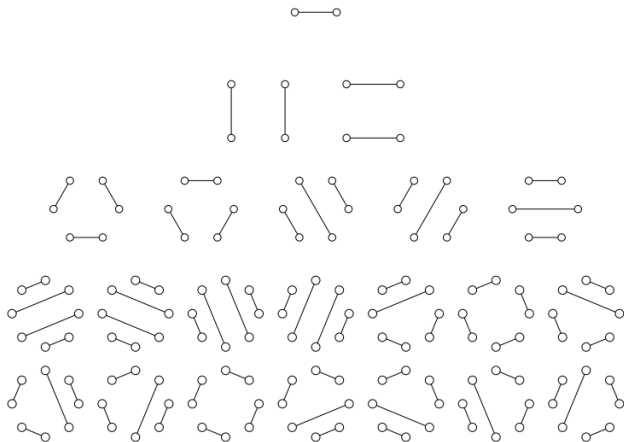
Další významy Catalanových čísel – triangulace mnohoúhelníků

Počet možných triangulací pravidelného n -mnohoúhelníka o $n + 2$ stranách.



Další významy Catalanových čísel – handshaking

$2n$ lidí sedí u kulatého stolu, kolika způsoby si mohou současně potřást rukama (nesmí se do kříže).



Domácí úkol

Najděte bijecki mezi těmi významy.