Turingův stroj, jazyky Turingových strojů

Jan Konečný

24.9.2014

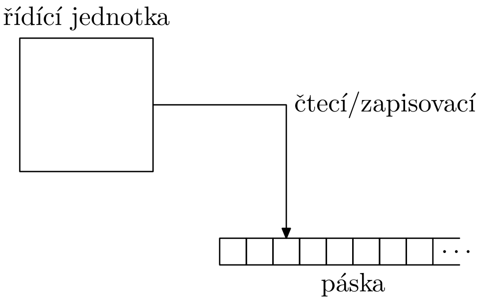
Turingův stroj (Turing machine)

Turingův stroj (TS)

- Alan Turing, 1936 (a-machine)
- účel: porozumět omezením mechanického výpočtu

TS se skládá

- z řídicí jednotky, která se vždy nachází v jednom z konečného množství stavů
- ze zleva omezené nekonečné pásky rozdělené na políčka. V každém políčku je zapsán jeden symbol.
- z čtecí/zapisovací hlavy, která je vždy umístěna nad jedním políčkem pásky.



Konečné automaty – připomínka z KMI/FJAA
(pedagogická berlička)

Definice

Konečný automat je dán

- Q – abecedou stavů,
- Σ – abecedou symbolů,
- $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ – přechodovou funkcí,
- $q_0 \in Q$ – počátečním stavem,
- $F \subseteq Q$ – množinou přijímacích (koncových) stavů.

Definice

Konfigurace konečného automatu: $\langle q, w \rangle \in Q \times \Sigma^*$

- $q \in Q$ – aktuální stav,
- $w \in \Sigma^*$ – nezpracovaná část vstupního slova.

Definice

Krok výpočtu $\vdash$ KA $\mathbf{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ je binární relace nad množinou konfigurací KA $\mathbf{A}$ definovaná takto:

$$\langle q_1, w_1\omega \rangle \vdash \langle q_2, \omega \rangle \text{ právě když } \delta(q_1, w_1) = q_2.$$

Výpočet je $\vdash^*$ – reflexivní, tranzitivní uzávěr relace $\vdash$.

Definice

Říkáme, že KA $\mathbf{A} = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0, F \rangle$ přijímá slovo $w \in \Sigma^*$, pokud $\langle q_0, w \rangle \vdash^* \langle f, \varepsilon \rangle$ a $f \in F$. V opačném případě říkáme, že KA zamítá slovo w.

(ε označuje prázdný řetězec)

Definice

Jazyk konečného automatu $\mathbf{A}$ je množina slov, které automat přijímá. Značíme $L(\mathbf{A})$.

Grafová reprezentace KA

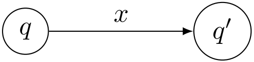
(furt ještě berlička)

Orientovaný graf

- **stavy** – uzly

- **počáteční stav a přijímací stavy**

- **přechody** $\delta(q, x) = q'$ – orientované ohodnocené hrany



(konec berličky)

Turingův stroj, definice

Program Turingova stroje lze chápat jako množinu elementárních instrukcí ve tvaru:

> *„Pokud je řídicí jednotka ve stavu q a čtecí/zapisovací hlava čte symbol a, tak změň stav řídicí jednotky na q', na pásku zapiš a' a posuň čtecí/zapisovací hlavu o jedno políčko směrem d.“*

Takováto instrukce se zapisuje jako $\delta(q, a) = (q', a', d)$ budeme ji nazývat přechod. Celý program, tedy množinu takovýchto instrukcí, pak nazýváme přechodovou funkcí TS.

Definice

Turingův stroj je struktura $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\textsf{start}}, q_+, q_- \rangle$ daná:

1. neprázdnou konečnou množinou stavů Q,
2. vstupní abecedou Σ, t.ž. $\llcorner\!\lrcorner \notin \Sigma$,
3. páskovou abecedou Γ, t.ž. $\Sigma \subset \Gamma$, $\llcorner\!\lrcorner \in \Gamma$,
4. přechodovou funkcí $\delta : Q \times \Gamma \to Q \times \Gamma \times \{L, R\}$,
5. počátečním stavem $q_{\textsf{start}} \in Q$,
6. přijímacím stavem $q_+ \in Q$ a zamítacím stavem $q_- \in Q$. $q_+ \neq q_-$.

Příklad

TS $M_1 = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_+, q_- \rangle$, kde

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_+, q_-\}$,
- $\Sigma = \{0\}$,
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\llcorner\!\lrcorner, \times\}$,
- δ je dána následující tabulkou:

	0	␣	x
q_0	$(q_1, ␣, R)$	$(q_-, ␣, R)$	(q_-, x, R)
q_1	(q_2, x, R)	$(q_+, ␣, R)$	(q_1, x, R)
q_2	$(q_3, 0, R)$	$(q_4, ␣, L)$	(q_2, x, R)
q_3	(q_2, x, R)	$(q_-, ␣, R)$	(q_3, x, R)
q_4	$(q_4, 0, L)$	$(q_1, ␣, R)$	$(q_4, 0, L)$

Turingův stroj, konfigurace

Definice

Konfigurace TS $T = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_+, q_- \rangle$ je uspořádaná trojice

$$(q, \alpha, n) \in Q \times \Gamma^* \times \mathbb{N}_0.$$

Slovy:

Konfigurace TS T – trojice, která zachycuje aktuální status všech tří komponent Turingova stroje:

- q je aktuální stav řídící jednotky,
- α je obsah pásky,
- n je pozice hlavy.

Konfigurace $(q, \alpha\text{␣}, n)$ a (q, α, n) budeme považovat za totožné.

Definice

Iniciální konfigurace TS T pro vstup $w \in \Sigma^*$ je $(q_0, w, 0)$.
Přijímající konfigurace TS T je konfigurace

$$(q_+, \alpha, n) \text{ pro jakékoli } \alpha \in \Gamma^* \text{ a } n \in \mathbb{N}_0.$$

Zamítající konfigurace TS T je konfigurace

$$(q_-, \alpha, n) \text{ pro jakékoli } \alpha \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}_0.$$

Iniciální konfigurace – řídící jednotka nachází v q_0, na pásce je zapsáno vstupní slovo (následované nekonečným počtem prázdných symbolů ␣) a hlava je nad nejlevějším políčkem pásky (s indexem 0).

Přijímající konfigurace – řídící jednotka je v q_+.

Zamítající konfigurace – řídící jednotka je v q_-.

Přijímající nebo zamítající konfigurace je *koncová konfigurace*.
Jiná konfigurace je *nekoncová konfigurace*.

Alternativně budeme konfiguraci zapisovat jako řetězec $\alpha q \beta \in \Gamma^* Q \Gamma^*$.
Konfigurace $\alpha q \beta$ přestavuje status stroje, který má na pásce zapsán řetězec $\alpha\beta$, hlava je nad prvním symbolem řetězce β, řídicí jednotka je ve stavu q.

Definice

Krok výpočtu TS je definován jako binární relace na množině konfigurací: Nechť $(q, a_0 \dots a_n, i)$ je taková konfigurace T, kde
$q \neq q_\pm, n \in \mathbb{N}_0, a_0, \dots, a_n \in \Gamma, i \leq n$.

(a) Je-li $1 \leq i \leq n$ a $\delta(q, a_i) = (q', b, \mathrm{L})$, pak

$$(q, a_0, \dots a_n, i) \vdash (q', a_0 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n, i-1).$$

(b) Je-li $\delta(q, a_0) = (q', b, \mathrm{L})$, pak

$$(q, a_0 \dots a_n, 0) \vdash (q', b a_1 \dots a_n, 0).$$

(c) Je-li $\delta(q, a_i) = (q', b, \mathrm{R})$, pak

$$(q, a_0 \dots a_n, i) \vdash (q', a_0 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n, i+1).$$

Definice kroku říká, jakým způsobem lze z nekoncové konfigurace odvodit novou podle přechodové funkce δ:

Pokud jsme ve stavu q a hlava čte páskový symbol a_i, a máme přechod $\delta(q, a_i) = (q', b, \mathrm{X})$, pak:

- řídící jednotka změní stav na q',
- na pásku se do pollíčka, nad kterým je hlava, zapíše b (přepíše se tedy původní symbol a_i)
- pohyb hlavy:
  (a) Pokud $\mathrm{X} = \mathrm{L}$ a hlava není nad nejlevějším políčkem pásky, pohne o jedno políčko doleva.
  (b) Pokud $\mathrm{X} = \mathrm{L}$ a hlava je nad nejlevějším políčkem pásky, hlava se nepohne vůbec.
  (c) Pokud $\mathrm{X} = \mathrm{R}$, hlava se pohne o jedno políčko doprava.

Definice

Výpočet $\vdash^*$ TS je reflexivní, tranzitivní uzávěr relace $\vdash$.

Zápis $\mathcal{C} \vdash \mathcal{C}'$ čteme takto:

konfigurace $\mathcal{C}'$ je odvoditelná *z konfigurace* $\mathcal{C}$ *jedním* krokem výpočtu.

Zápis $\mathcal{C} \vdash^* \mathcal{C}'$ čteme takto:

konfigurace $\mathcal{C}'$ je odvoditelná *z konfigurace* $\mathcal{C}$.

Definice

Nechť T je TS a $w \in \Sigma^*$:

T *přijímá* w, pokud $\mathcal{C}_0^w \vdash^* \mathcal{C}_+$, kde $\mathcal{C}_0^w$ je iniciální konfigurace T pro vstup w a $\mathcal{C}_+$ je přijímající konfigurace stroje T.

T *zamítá* w, pokud $\mathcal{C}_0^w \vdash^* \mathcal{C}_-$, kde $\mathcal{C}_0^w$ je iniciální konfigurace T pro vstup w a $\mathcal{C}_-$ je zamítající konfigurace stroje T.

T *cyklí* pro w, pokud w nepřijímá ani nezamítá.

TS $M_1 = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_+, q_- \rangle$, kde

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_+ q_-\}$,
- $\Sigma = \{0\}$,
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\llcorner\!\lrcorner, \times\}$,
- δ je dána následující tabulkou:

	0	$\llcorner\!\lrcorner$	x
q_0	$(q_1, \llcorner\!\lrcorner, R)$	$(q_-, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_-, x, R)
q_1	(q_2, x, R)	$(q_+, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_1, x, R)
q_2	$(q_3, 0, R)$	$(q_4, \llcorner\!\lrcorner, L)$	(q_2, x, R)
q_3	(q_2, x, R)	$(q_-, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_3, x, R)
q_4	$(q_4, 0, L)$	$(q_1, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_4, x, L)

Příklad

Iniciální konfigurace M_1 pro vstupní slovo $w = 00000$ je $(q_0, \underline{0}0000, 0)$. Z této konfigurace je v jednom kroku odvoditelná konfigurace $(q_1, \llcorner\!\lrcorner\underline{0}000, 1)$. Celý výpočet nad slovem w by vypadal takto:
$(q_0, \underline{0}0000, 0) \vdash (q_1, \llcorner\!\lrcorner\underline{0}000, 1) \vdash (q_2, \llcorner\!\lrcorner\mathsf{x}\underline{0}00, 2) \vdash (q_3, \llcorner\!\lrcorner\mathsf{x}0\underline{0}0, 3) \vdash (q_2, \llcorner\!\lrcorner\mathsf{x}0\mathsf{x}\underline{0}, 4) \vdash$
$(q_3, \llcorner\!\lrcorner\mathsf{x}0\mathsf{x}0\underline{\llcorner\!\lrcorner}, 5) \vdash (q_-, \llcorner\!\lrcorner\mathsf{x}0\mathsf{x}0\llcorner\!\lrcorner\underline{\llcorner\!\lrcorner}, 6)$.
Výpočet tedy končí v zamítající konfiguraci $(q_-, \llcorner\!\lrcorner\mathsf{x}0\mathsf{x}0\llcorner\!\lrcorner\underline{\llcorner\!\lrcorner}, 6)$, TS M_1 tedy zamítá slovo 00000.

TS $M_1 = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_+, q_- \rangle$, kde

- $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_+ q_-\}$,
- $\Sigma = \{0\}$,
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\text{\textvisiblespace}, \times\}$,
- δ je dána následující tabulkou:

	0	$\text{\textvisiblespace}$	x
q_0	$(q_1, \text{\textvisiblespace}, R)$	$(q_-, \text{\textvisiblespace}, R)$	(q_-, x, R)
q_1	(q_2, x, R)	$(q_+, \text{\textvisiblespace}, R)$	(q_1, x, R)
q_2	$(q_3, 0, R)$	$(q_4, \text{\textvisiblespace}, L)$	(q_2, x, R)
q_3	(q_2, x, R)	$(q_-, \text{\textvisiblespace}, R)$	(q_3, x, R)
q_4	$(q_4, 0, L)$	$(q_1, \text{\textvisiblespace}, R)$	(q_4, x, L)

Příklad

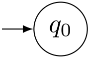
Výpočet TS M_1 pro vstupní slovo $w = 0000$ by vypadal takto
$(q_0, \underline{0}000, 0) \vdash (q_1, \text{\textvisiblespace}\underline{0}00, 1) \vdash (q_2, \text{\textvisiblespace}\mathsf{x}\underline{0}0, 2) \vdash (q_3, \text{\textvisiblespace}\mathsf{x}0\underline{0}, 3) \vdash (q_2, \text{\textvisiblespace}\mathsf{x}0\mathsf{x}\underline{\text{\textvisiblespace}}, 4) \vdash$
$(q_4, \text{\textvisiblespace}\mathsf{x}0\underline{\mathsf{x}}, 3) \vdash (q_4, \text{\textvisiblespace}\mathsf{x}\underline{0}\mathsf{x}, 2) \vdash (q_4, \text{\textvisiblespace}\underline{\mathsf{x}}0\mathsf{x}, 1) \vdash (q_4, \underline{\text{\textvisiblespace}}\mathsf{x}0\mathsf{x}, 0) \vdash (q_0, \text{\textvisiblespace}\underline{\mathsf{x}}0\mathsf{x}, 1) \vdash$
$(q_1, \text{\textvisiblespace}\mathsf{x}\underline{\mathsf{x}}\mathsf{x}, 2) \vdash (q_1, \text{\textvisiblespace}\mathsf{xx}\underline{\mathsf{x}}, 3) \vdash (q_1, \text{\textvisiblespace}\mathsf{xxx}\underline{\text{\textvisiblespace}}, 4) \vdash (q_+, \text{\textvisiblespace}\mathsf{xxx}\text{\textvisiblespace}\underline{\text{\textvisiblespace}}, 5)$
Výpočet tedy končí v přijímající konfiguraci $(q_+, \text{\textvisiblespace}\mathsf{xxx}\text{\textvisiblespace}\underline{\text{\textvisiblespace}}, 5)$, TS M_1 tedy přijímá slovo 0000.

Přechodový diagram – grafová reprezentace **TS**

Orientovaný graf

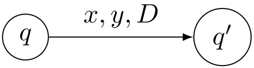
- **stavy** – uzly

- **počáteční stav a koncové stavy**

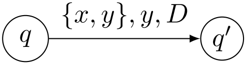


  Zamítací stav (a do něj vedoucí přechody) se nezakreslují.

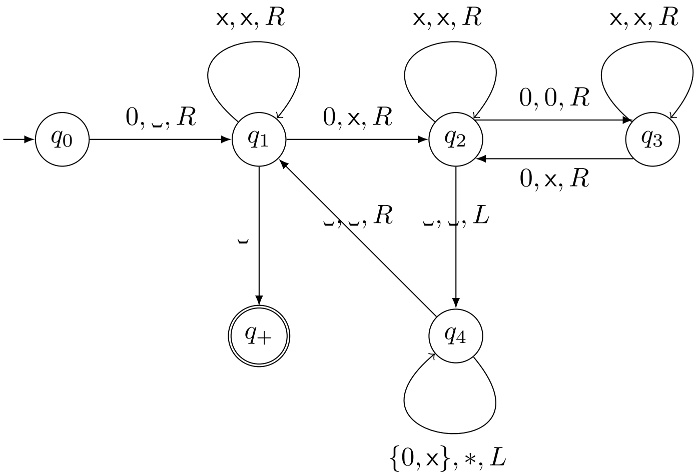
- **přechody** $\delta(q, x) = (q', y, D)$ – orientované ohodnocené hrany

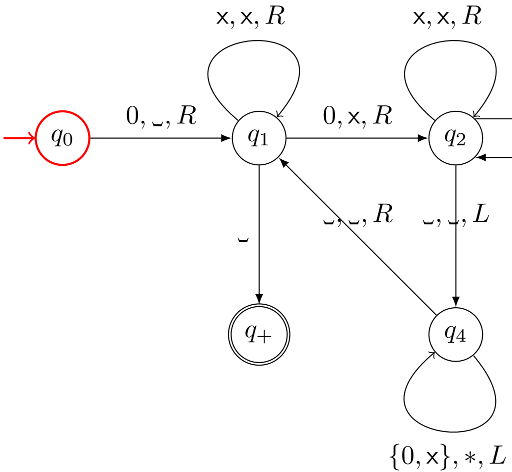


  více přechodů se (někdy) dá zakreslit jako jeden, když jsou mezi stejnými stavy:
  $\delta(q, y) = (q', y, D)$ a $\delta(q, x) = (q', y, D)$.

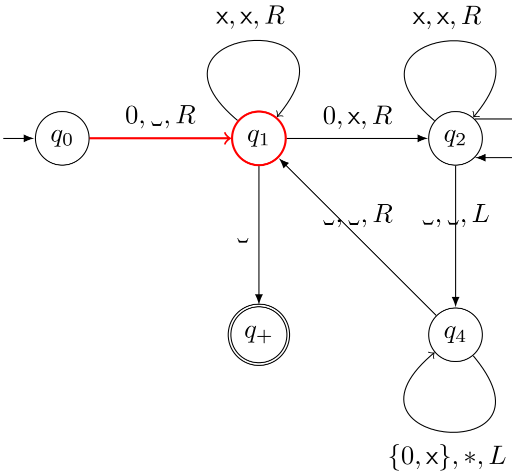


Grafová reprezentace TS (přechodový diagram TS)

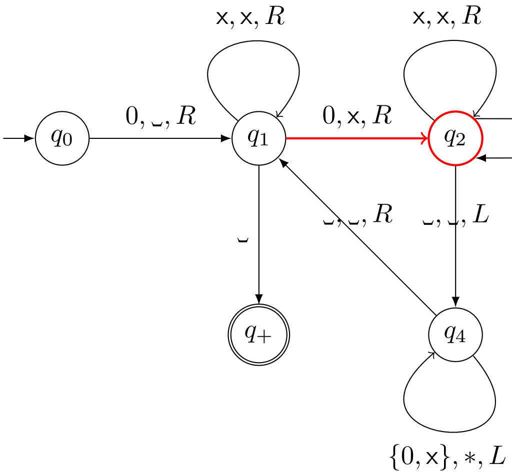




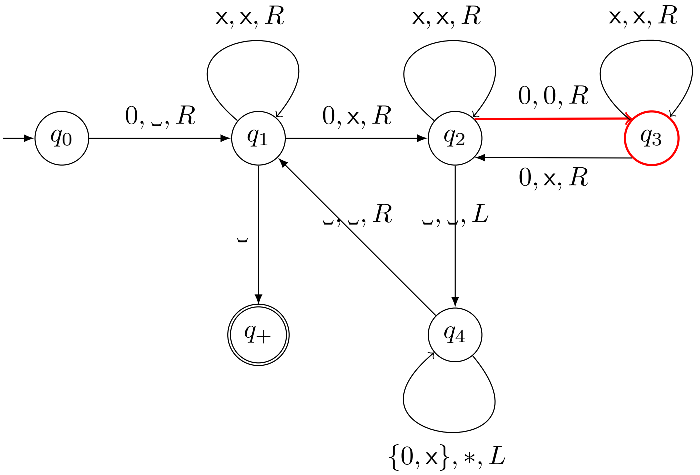
$(q_0, \underline{0}000, 0)$



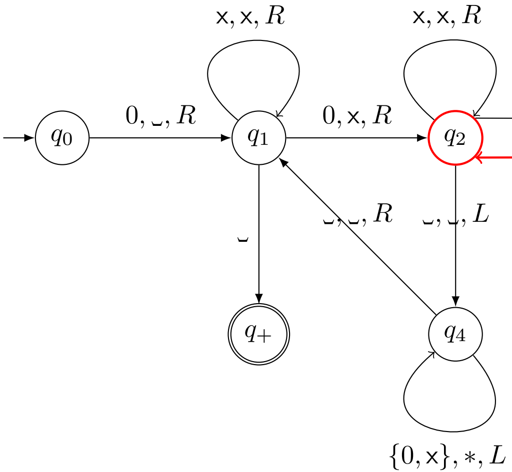
$(q_1, \text{␣}\underline{0}00, 1)$



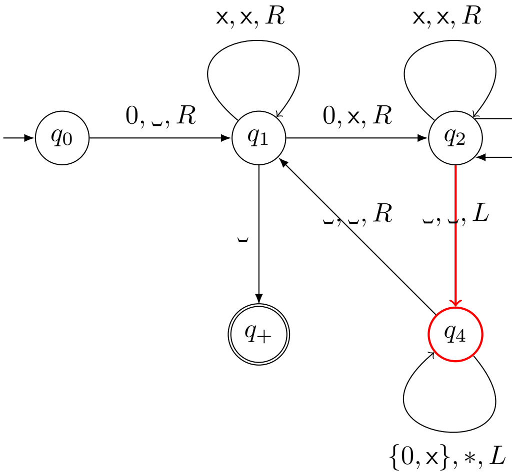
$(q_2, \text{␣x}\underline{0}0, 2)$



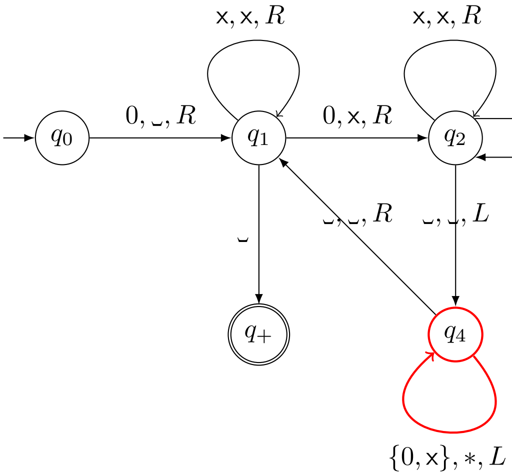
$(q_3, \text{␣x0}\underline{0}, 3)$



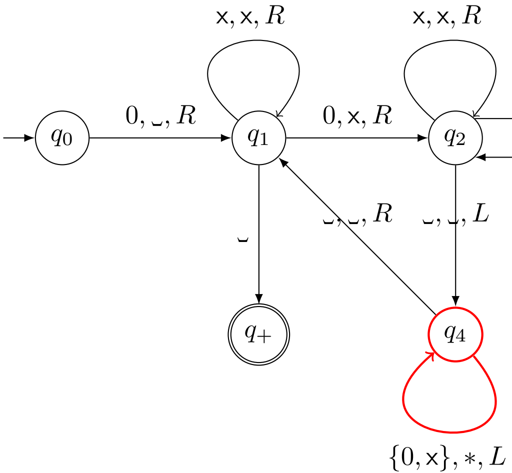
$(q_2, ␣\mathsf{x}0\mathsf{x}\underline{␣}, 4)$



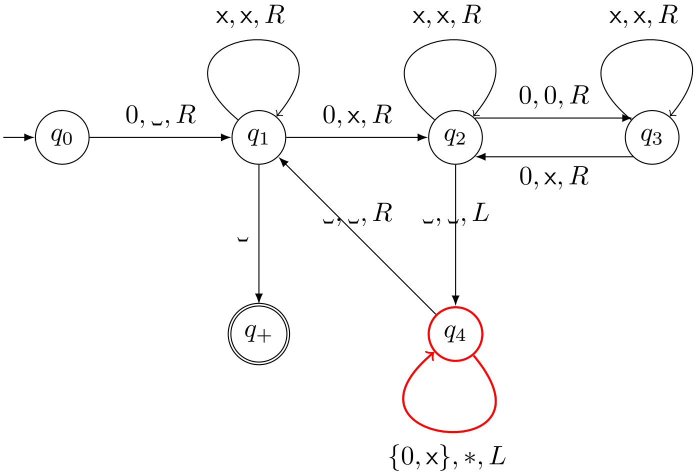
$(q_4, \text{␣x0}\underline{\text{x}}\text{␣}, 3)$



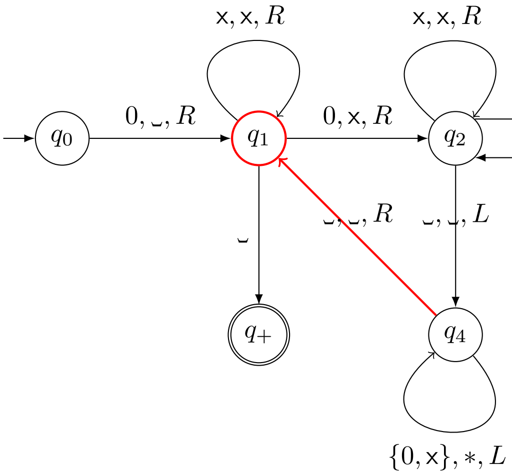
$(q_4, ␣\mathsf{x}\underline{0}\mathsf{x}␣, 2)$



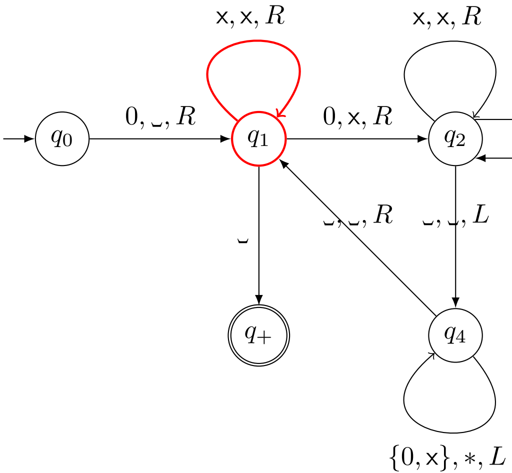
$(q_4, \textvisiblespace\underline{\mathsf{x}}0\mathsf{x}\textvisiblespace, 1)$



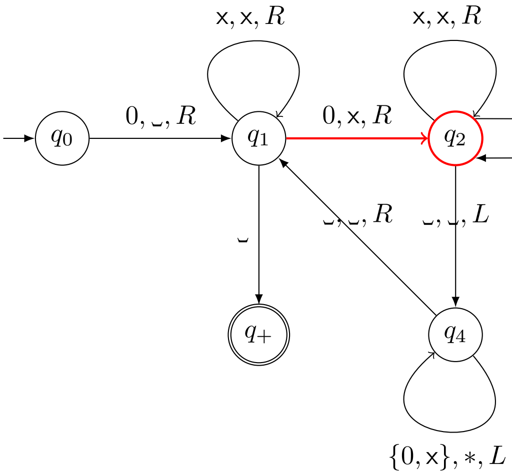
$(q_4, \underline{\sqcup}\mathsf{x}0\mathsf{x}\sqcup, 0)$



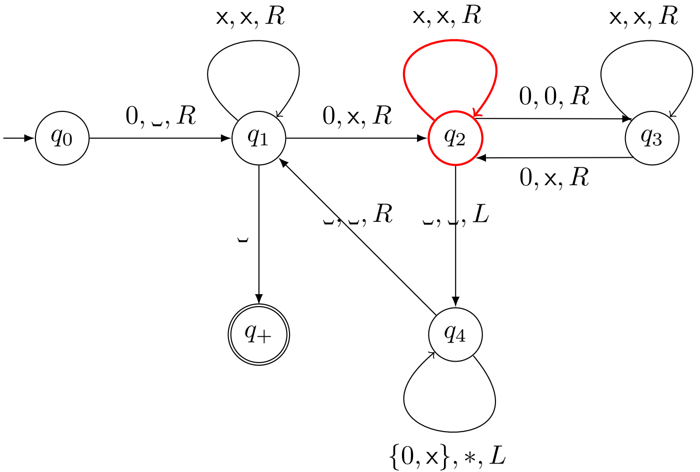
$(q_1, \textvisiblespace\underline{\mathsf{x}}0\mathsf{x}\textvisiblespace, 1)$



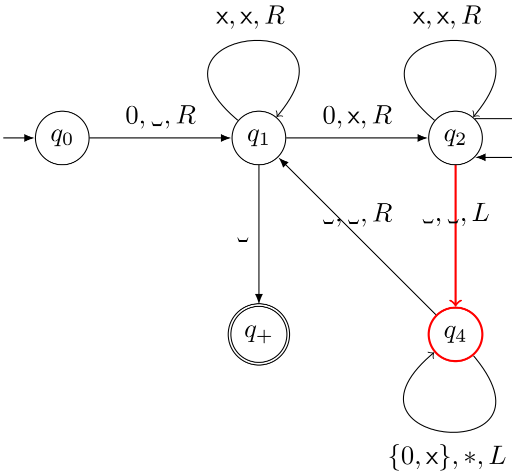
$(q_1, \textvisiblespace\mathsf{x}\underline{0}\mathsf{x}\textvisiblespace, 2)$



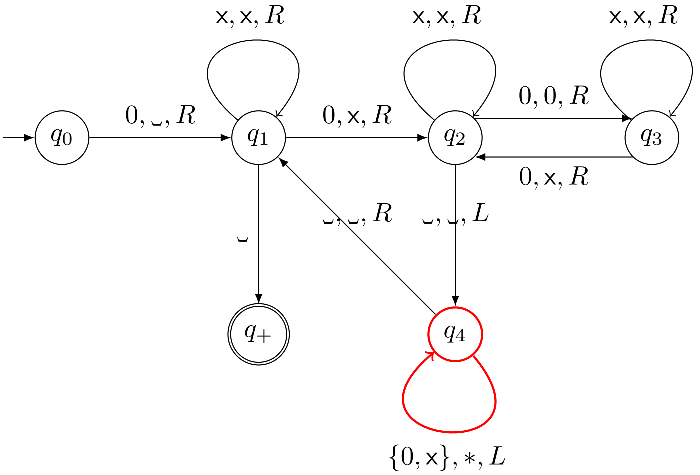
$(q_2, \text{␣xx}\underline{\text{x}}\text{␣}, 3)$



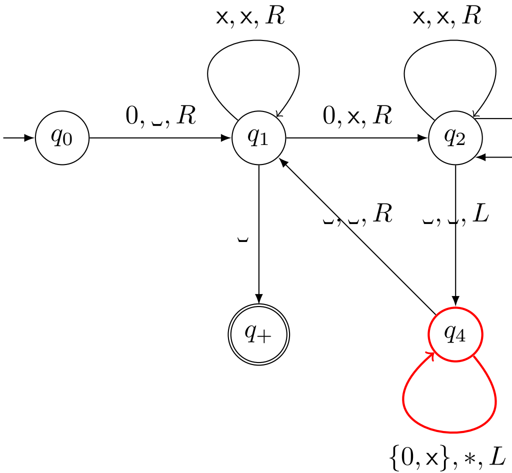
$(q_2, ␣\mathsf{xxx}\underline{␣}, 4)$



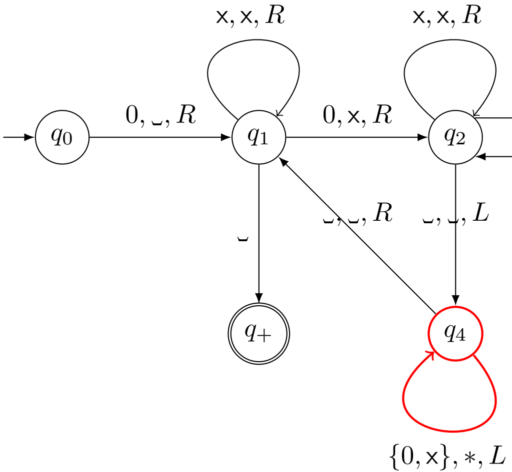
$(q_2, ␣\mathsf{xx}\underline{\mathsf{x}}␣, 3)$



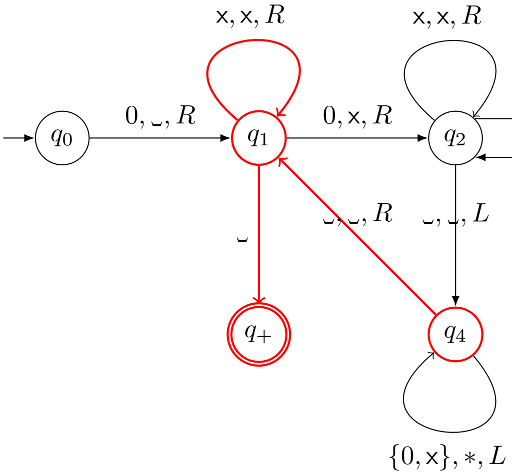
$(q_2, \text{␣x}\underline{\text{x}}\text{x␣}, 2)$



$(q_2, \llcorner\underline{\mathsf{x}}\mathsf{xx}\llcorner, 1)$



$(q_2, \underline{\llcorner\!\lrcorner}\mathsf{xxx}\llcorner\!\lrcorner, 0)$



$(q_+, ␣\mathsf{xxx}␣\underline{␣}, 5)$

Definice

Množinu všech slov $w \in \Sigma^*$, které TS T přijímá značíme $L(T)$ a nazýváme *jazykem Turingova stroje*, t.j.

$$L(T) = \{w \mid w \in \Sigma^*, (w, q_0, 0) \vdash^* \mathcal{C}_+\}$$

Jazyk $L(T)$ nazýváme *jazyk přijímaný TS* T.
Říkáme, že TS T *přijímá jazyk* $L(T)$.

Pokud navíc platí, že TS T zamítá každé $w \notin L(T)$, nazýváme jazyk $L(T)$ *jazyk rozhodovaný TS* T.
Říkáme, že TS T *rozhoduje jazyk* $L(T)$.
A říkáme, že TS T *rozhoduje jazyk*, pokud rozhoduje nějaký jazyk $L(T)$.

Pozn.: To znamená, že pokud TS rozhoduje jazyk, p.k. nikdy necyklí.
Pozn.: TS, který rozhoduje jazyk, je nazýván také *decider*.

Definice

Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ nazveme

- *jazyk rozhodovaný TS*, pokud existuje TS T, který jej rozhoduje.
- *jazyk přijímaný TS*, pokud existuje TS T, který jej přijímá.

Jazykům rozhodovaným TS říkáme také *rekurzivní jazyky*; jazykům přijímaným TS říkáme také *částečně rekurzivní jazyky* nebo *rekurzivně spočetné jazyky*.

Příklad

Například $A = \{0^{2^n} \mid n \geq 0\}$ je jazyk rozhodovaný TS, protože M_1 jej rozhoduje.

Třídu všech rekurzivních jazyků značíme R.
Třídu všech částečně rekurzivních jazyků značíme ČR.
Jasně platí R $\subseteq$ ČR.

Rozhodovací problémy

Rozhodovací problém (též jen *problém*) je otázka, na kterou se odpovídá „ano“ nebo „ne“.
Instance problému je otázka doplěná konkrétními hodnotami, pro které je ta otázka pokládána.
Podle odpovědi budeme rozlišovat

- *instance s odpovědí „ano“* a
- *instance s odpovědí „ne“*.

Příklad

Rozhodovacím problémem je například:

„Je x menší než y?“,

kde instance jsou dvojice x, y přirozených čísel.

$x = 3, y = 7$ je instance s odpovědí „ano“.
$x = 3, y = 3$ je instance s odpovědí „ne“.

Problémy budu zapisovat následovně

název problému
Instance: *instance* **Otázka:** *otázka*

Máme-li problém $\mathcal{P}$,

- pro instance x s odpovědí „ano“ píšeme $x \in \mathcal{P}$,
- pro instance x s odpovědí „ne“ píšeme $x \notin \mathcal{P}$.

Příklad

Např.: Označme $\mathcal{P}_{x<y}$ problém z předchozího slajdu:

Porovnání čísel ($\mathcal{P}_{x<y}$)
Instance: $x, y \in \mathbb{N}$ **Otázka:** Platí $x < y$?

Píšeme například $\langle x = 3, y = 7 \rangle \in \mathcal{P}_{x<y}$ a $\langle x = 3, y = 3 \rangle \notin \mathcal{P}_{x<y}$.

Nadále budeme uvažovat pouze problémy jejichž instance jsou konečné a lze je tedy reprezentovat řetězci.
Reprezentaci instance x řetězcem budeme nazývat *zakódování* a značit $[x]$

Příklad

instance problému $\mathcal{P}_{x<y}$, tedy dvojice x, y můžeme zakódovat takto

$$[x, y] = 0^x 10^y.$$

Definice

Říkáme, že TS T řeší problém P, pokud

- přijímá všechny jeho instance s odpovědí „ano“,
- zamítá všechny jeho instance s odpovědí „ne“.

Říkáme, že TS T částečně řeší problém P, pokud přijímá právě všechny jeho instance s odpovědí „ano“.

Definice

Problém $\mathcal{P}$ nazveme

- *řešitelný*, pokud existuje TS T, který ho řeší.
- *částečně řešitelný*, pokud existuje TS T, který ho částečně řeší.

Jazyk a problém je tatáž věc

- Problém $\mathcal{P}$ můžeme chápat jako jazyk $L_{\mathcal{P}}$

$$L_{\mathcal{P}} = \{[x] \mid x \text{ je instancí } \mathcal{P} \text{ s odpovědí „ano"}\}$$

- Jazyk $L \in \Sigma^*$ pak můžeme chápat jako jako problém $\mathcal{P}_L$:

Problém $\mathcal{P}_L$
Instance: Řetězec $x \in \Sigma^*$ **Otázka:** Patří x do jazyka L?

Příklad

Problém $\mathcal{P}_{x<y}$ můžeme považovat za jazyk

$$L_{x<y} = \{0^x 1 0^y \mid x, y \in \mathbb{N}, x < y\}$$

Zjevně také platí, že:

- řešitelný problém je rekurzivní jazyk,
- částečně řešitelný problém je částečně rekurzivní jazyk.

Příklad

Příklady problémů z FJaA:

Problém, který je řešitelný

Ekvivalence konečných automatů
Instance: Konečné automaty K_1 a K_2.
Otázka: Přijímají K_1 a K_2 stejný jazyk?

Problém, který je částečně řešitelný, ale není řešitelný

Nonekvivalence bezkontextových gramatik
Instance: Bezkontextové gramatiky G_1 a G_2.
Otázka: Generují G_1 a G_2 různé jazyky?

Problém, který není částečně řešitelný

Ekvivalence bezkontextových gramatik
Instance: Bezkontextové gramatiky G_1 a G_2.
Otázka: Generují G_1 a G_2 stejný jazyk?

Definice

Nechť $f : \Sigma^* \to \Sigma^*$ je funkce.

Říkáme, že (deterministický) TS *vyčísluje funkci* f, pokud pro každé vstupní slovo $w \in \Sigma^*$ zapíše na pásku $f(w)$ a skončí.

Funkce f se nazývá *vyčíslitelná*, pokud existuje (deterministický) TS, který ji vyčísluje.

Poznámka: Stroji, který vyčísluje funkci se také říká *algoritmus*. Toto je v souladu s tím, jak známe tento pojem z KMI/ALM1.

Příklad

TS vyčíslující funkci $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ zobrazující $w \mapsto 0w$ (tedy přidání počáteční nuly).

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.

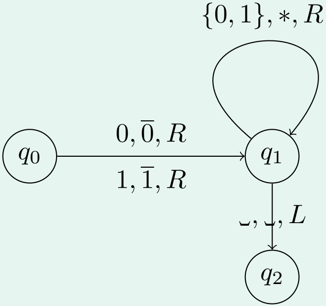
Příklad

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.

$$q_0 \xrightarrow[1,\overline{1},R]{0,\overline{0},R} q_1$$

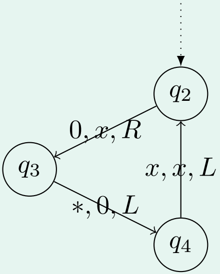
Příklad

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.



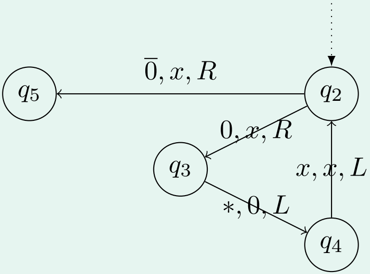
Příklad

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.



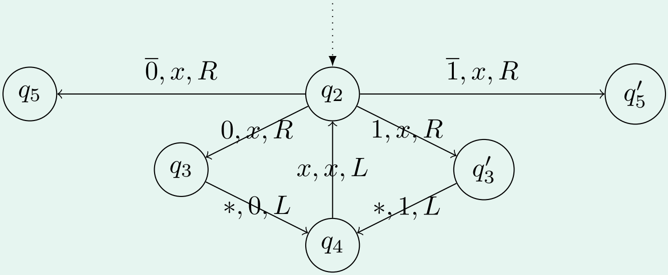
Příklad

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.



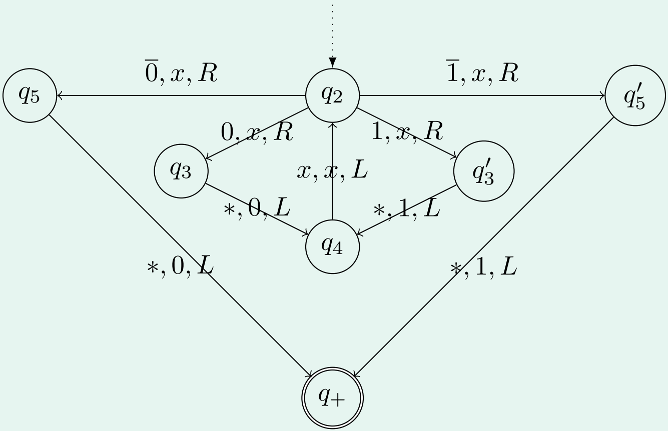
Příklad

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.



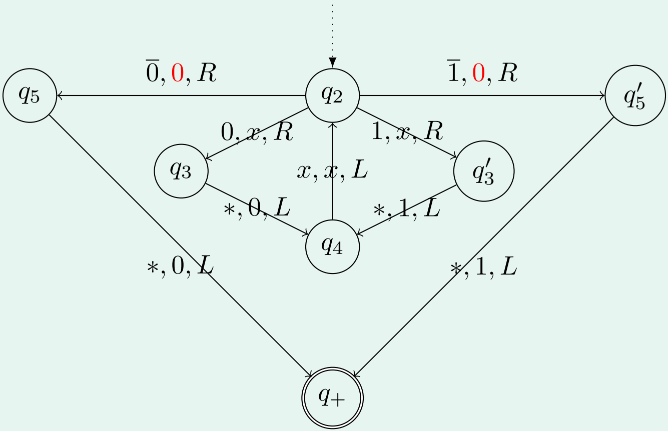
Příklad

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.



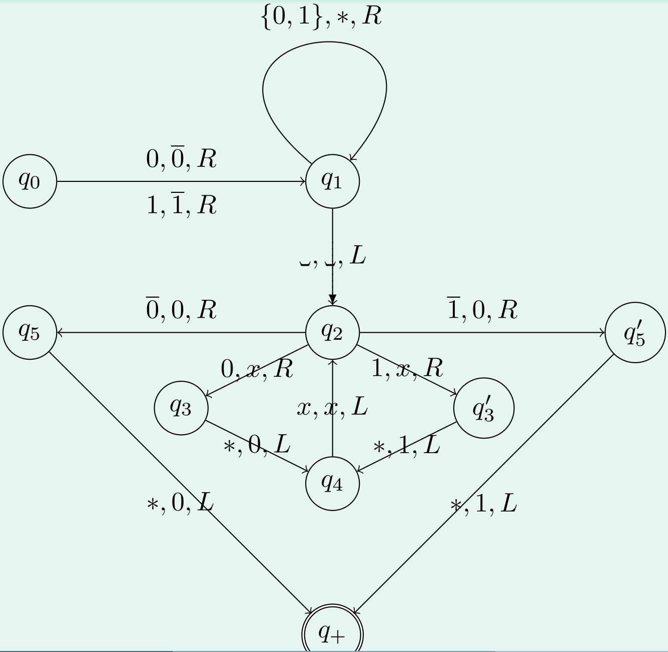
Příklad

1. Označíme začátek pásky (první symbol).
2. Najdeme konec vstupního slova.
3. Dokud nepřesuneme označené symboly, přesouváme každý symbol vstupního slova o jedno pole doprava.
4. Přidáme počáteční nulu.



Příklad

Celý stroj:



Zakódování TS

TS T do řetězce $[T]$.

- Q Předpokládejme, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$.
  Množinu zakódujeme jako: 0^n.
- Σ a Γ: Předpokládejme,
  $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}, \Gamma = \Sigma \cup \{a_m + 1, \dots, a_{m+p}\}$ a $a_{m+p} = \sqcup$.
  Kódujeme jako: 0^m10^p.
- δ: Každý přechod $\delta(q_i, a_j) = (q_l, a_k, \mathrm{X})$ zakódujeme jako

$$0^i10^j10^l10^k10^x, \text{ kde } x = \begin{cases} 1 & \text{pokud } \mathrm{X} = \mathrm{L}, \\ 2 & \text{pokud } \mathrm{X} = \mathrm{R}. \end{cases}$$

  Celou přechodovou funkci pak zakódujeme jako zřetězení zakódování jednotlivých přechodů oddělených dvěma jedničkami 11.
- q_{start} nekódujeme, uvažujeme $q_{\text{start}} = q_1$.
- q_+ zakódujeme jako 0^e takže $q_+ = q_e$.
- q_- zakódujeme jako 0^f takže $q_- = q_f$.

Zakódování celého TS je pak zřetězení všech těchto částí oddělených třemi jedničkami 111: tedy

$$[Q]111[\Sigma, \Gamma]111[\delta]111[q_+]111[q_-]$$

.

Zakódování TS $M_1 = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0 = q_1, q_+ = q_6, q_- = q_7 \rangle$, kde

- $Q = \{q_1, \dots, q_7\}$,
- $\Sigma = \{0 = a_1\}$,
- $\Gamma = \Sigma \cup \{\mathsf{x} = a_2, \llcorner\!\lrcorner = a_3\}$,
- δ je dána následující tabulkou:

	0	$\llcorner\!\lrcorner$	x
q_1	$(q_2, \llcorner\!\lrcorner, R)$	$(q_7, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_7, x, R)
q_2	(q_3, x, R)	$(q_6, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_2, x, R)
q_3	$(q_4, 0, R)$	$(q_5, \llcorner\!\lrcorner, L)$	(q_3, x, R)
q_4	(q_3, x, R)	$(q_6, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_4, x, R)
q_5	$(q_5, 0, L)$	$(q_2, \llcorner\!\lrcorner, R)$	(q_5, x, L)

0000000111
0100111
010100100010011010001000000010001001101001000000010010011
00101000100100110010001000000100010011001001001001 0011
000101000010100110001000100000100010110001001000100 10011
0000101000100100110000100010000001000100110000100100001001 0011
00000101000001010110000010001001000100110000010010000010 10111
0000001110000000

- To samozřejmě není jediný způsob jak kódovat TS.
- K jednomu stroji existuje několik kódů (např. přechody mohou být kódované v libovolném pořadí)

Důsledkem toho, že TS lze kódovat do řetězců je: ČR je spočetně nekonečná, R je spočetně nekonečná.

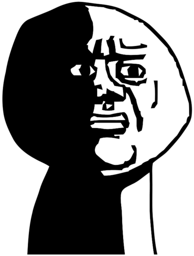
Víme, že jazyků nad jakoukoli abecedou je nespočetně mnoho...
protože kdyby ne, šly by očíslovat, seřadit do řádků tabulky, jako je tahle (sloupce reprezentují řetězce, x znamená přítomnost řetězce v jazyce)

	s_1	s_2	s_3	s_4	$\dots$
L_1	x				
L_2	x		x		
L_3		x	x		
L_4	x			x	
$\vdots$					

Jazyk $L_? = \{s_n \mid s_n \notin L_n\}$ nemůže být v žádném řádku tabulky – spor.

To mimo jiné znamená, že

- neřešitelných problémů je nekonečněkrát víc než řešitelných.
- náhodně vybraný problém je řešitelný s pravěpodobností 0.



ALMOST NO PROBLEM CAN BE SOLVED!

- naštěstí problémy, které jsou důležité v praxi, mají obvykle jasně specifikované zadání a obvykle řešitelné jsou.

Kódování slov, konfigurací a výpočtů.

- slova (nad abecedou $\Sigma = \{a_1, a_2 \ldots, a_m\}$)

$$[a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_n}] = 0^{i_1} 1 0^{i_2} 1 \ldots 1 0^{i_n}$$

  např.: $[a_1 a_2 a_2 a_3 a_1] = 0100100100010$

- konfigurace

$$(q, \alpha, n) = [q]11[\alpha]110^n$$

- výpočet $k_1 \vdash k_2 \vdash \cdots \vdash k_n$

$$[k_1]111[k_2]111\ldots111[k_n]$$

Poznámka: doteď jsme v žádném zakódování neměli víc, jak tři jedničky po sobě. čtyři jedničky budeme používat jako oddělovač.
Např. zakódování TS M se vstupním slovem w, tedy $[M, w] = [M]1111[w]$.
Tímto způsobem můžeme „předat Turingovu stroji více vstupů“.

Church-Turingova Teze

Intuitivní pojem algoritmu = algortimus TS.

cvičení 1

1. Navrhněte TS, který rozhoduje jazyk 0^{3m+1}.
   (hint: toto je regulání jazyk vzpomeňte si na kurz FJAA)
2. Navrhněte TS vyčíslující *nulovou funkci* $o(n) = 0$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
3. Navrhněte TS vyčíslující *funkci následníka* $s(n) = n + 1$ pro každé $n \in \mathbb{N}_0$.
4. Navrhněte TS vyčíslující *funkci projekce* $p(x, y, z) = y$ pro každé $x, y, z \in \mathbb{N}_0$.

Na co byste měli být schopní odpovědět: Jak je definován TS, výpočet, jak TS přijímá a zamítá slova, kdy TS cyklí, co jsou rekurzivní jazyky, částečně rekurzivní jazyky. Co je rozhodovací problém, co je instance problému, a jak to souvisí s jazyky. Co je řešitelnost problému a částečná řešitelnost problému. Jak vypadá grafová reprezentace TS, jak dá zakódovat TS, jak se dá zakódovat slovo, konfigurace, výpočet? Kolik je kterých problémů a proč má informatik depresi?

Reading assignment: Pročtěte si někde, kdo to byli Alan Mathison Turing, Alonzo Church, Stephen Cole Kleene, Emil Leon Post.