Problémy, které nejsou řešitelné, a problémy které nejsou ani částečně řešitelné. Uzávěrové vlastnosti rekurzivních a částečně rekurzivních jazyků.

Jan Konečný

19. října 2014

Z PŘEDNÁŠKY 1 víme:

- jazyk $\approx$ problém
- jazyků je nespočetně mnoho, T. strojů je spočetně mnoho:

Nutně musí existovat jazyky, které nejsou přijímané (nebo rozhodované) TS – a není jich málo.

Dále víme, že R $\subseteq$ ČR

Dnes:

- Jazyky $\notin$ ČR, jazyky $\notin$ R,
- R $\subset$ ČR,
- uzávěrové vlastnosti TS.

Uzávěrové vlastnosti rekurzivních jazyků

Operace s jazyky (opáčko z KMI/FJAA)

Množinové operace (protože jazyk je množina řetězců).

- průnik $L_1 \cap L_2$,
- sjednocení $L_1 \cup L_2$,
- doplněk $\Sigma^* \setminus L$

Další jednoduché, ale mocné operace

- konkatenace $L_1 L_2$ (nebo taky $L_1 \circ L_2$)
- Kleeneho uzávěr L^*
- positivní uzávěr L^+

Operace s jazyky: konkatenace

Definice

Nechť L_1 a L_2 jsou jazyky. Jejich *konkatenací* rozumíme jazyk
$L_1 \circ L_2 = \{w_1w_2 \mid w_1 \in L_1, w_2 \in L_2\}$

Příklad

$L_1 = \{00, 10\}$, $L_2 = \{0, 1\}$, $L_1 \circ L_2 = \{000, 001, 100, 101\}$.

$L \circ \{\varepsilon\} = L$

$L \circ \emptyset = \emptyset$

Operace s jazyky: uzávěry

Definice

Nechť L je jazyk, *Kleeneho uzávěr* L^* jazyka L definujeme jako

$$L^* = \bigcup_{i \geq 0} L^i, \quad \text{kde } L^n = \begin{cases} \{\varepsilon\} & \text{pokud } n = 0, \\ L^{n-1} \circ L & \text{jinak.} \end{cases}.$$

Pozitivní uzávěr je pak definován jako

$$L^+ = \bigcup_{i \geq 1} L^i.$$

Poznámka

Pozitivním uzávěrem se zabývat nebudeme, dá se vyjádřit jako $L^+ = L^* \circ L$.

Uzávěrové vlastnosti třídy R: doplňek

Věta

Pokud L je rekurzivní, pak $\Sigma^* \setminus L$ je rekurzivní.

Důkaz.

Pokud je L rekurzivní, existuje TS T, který ho rozhoduje. Sestavíme $\neg T$ takto.

TS $\neg T$ pro w:

1. Spustí T pro w,
   pokud
   - T přijme w, $\neg T$ zamítne.
   - T zamítne w, $\neg T$ přijme.

Takový stroj bude rozhodovat $\Sigma^* \setminus L$, a tedy $\Sigma^* \setminus L$ je rekurzivní. □

Poznámka

Vlastně $\neg T$ vyrobíme z T tak, že zaměníme koncové stavy.

Věta

Nechť $L_1, L_2 \in R$ jsou rekurzivní jazyky, pak $L_1 \cup L_2 \in R$ a $L_1 \cap L_2 \in R$.

Důkaz (pro $L_1 \cup L_2$).

Nechť TS T_1 rozhoduje L_1 a TS T_2 rozhoduje L_2. Sestavíme TS $T_\cup$, který rozhoduje $L_1 \cup L_2$, takto:

TS $T_\cup$ pro w:

1. *spustí T_1 pro w, pokud*
   - *T_1 přijme w, $T_\cup$ přijme w.*
   - *T_1 zamítne w, pokračujeme krokem 2.*
2. *spustí T_2 pro w, pokud*
   - *T_2 přijme w, $T_\cup$ přijme w.*
   - *T_2 zamítne w, $T_\cup$ zamítne w.*

Pro $L_1 \cap L_2$ se to dokáže analogicky. □

Otázka: jak by to bylo se sjednocením (či průnikem) nekonečně mnoha jazyků?

Věta

Nechť $L_1, L_2 \in$ R, pak $L_1 \circ L_2 \in$ R.

Důkaz.

Nechť TS T_1 rozhoduje L_1 a TS T_2 rozhoduje L_2.
Sestavíme nedeterministický TS $T_\circ$ rozhodující $L_1 \circ L_2$ takto:

NTS $T_\circ$ pro w:

1. *pokud čte prázdný symbol pokračuje bodem 2. Jinak se nedeterministicky rozhodne mezi následujícími dvěma možnostmi:*
   - *pokračuje bodem 2.*
   - *posune hlavu doprava, a pokračuje bodem 1.*
2. *spustí T_1 pro w_1 (část w od hlavy vlevo), pokud*
   - *T_1 přijme w_1, pokračujeme krokem 3.*
   - *T_1 zamítne w_1, $T_\circ$ zamítne w.*
3. *spustí T_2 pro w_2 (část w od hlavy vpravo), pokud*
   - *T_2 přijme w_2, $T_\circ$ přijme w.*
   - *T_2 zamítne w_2, $T_\circ$ zamítne w.*

Věta

Pokud $L \in R$, pak $L^* \in R$.

Důkaz.

Nechť TS T rozhoduje L.

NTS $T_\circ$ pro w:

1. *pokud je prázdný vstup, přijme w*
2. *pokud čte prázdný symbol pokračuje bodem 3. Jinak se nedeterministicky rozhodne mezi následujícími dvěma možnostmi:*
   - *pokračuje bodem 3.*
   - *posune hlavu doprava, a pokračuje bodem 2.*
3. *spustí T pro w_1 (část w od hlavy doleva), pokud*
   - *T přijme w_1, smaže w_1 ze vstupu pokračujeme krokem 1.*
   - *T zamítne w_1, $T_\circ$ zamítne w.*

$\square$

Uzávěrové vlastnosti částečně rekurzivních jazyků

Věta

Nechť $L, L_1, L_2 \in$ *ČR pak*

- $L_1 \cup L_2 \in$ *ČR,*
- $L_1 \cap L_2 \in$ *ČR,*
- $L_1 \circ L_2 \in$ *ČR,*
- $L^* \in$ *ČR.*

Poznámka

Všimněte si, že tam není doplněk: to proto že třída částečně rekurzivních jazyků <u>není</u> uzavřená na doplněk.

Další vlastnosti tříd R a ČR

Věta

Pokud $L \in$ ČR a $\Sigma^* \setminus L \in$ ČR, pak $L \in$ R.

Idea důkazu.

Mějme TS T_L, který přijímá L a TS $T_{\Sigma^* \setminus L}$, který přijímá $\Sigma^* \setminus L$. Můžu sestavit TS, který pro vstupní slovo w bude simulovat výpočty T_L pro w a $T_{\Sigma^* \setminus L}$ pro w („paraleně“ po jednom kroku). Protože platí buďto $w \in L$ nebo $w \in \Sigma^* \setminus L$, jeden z těch výpočtů musí skončit přijetím.

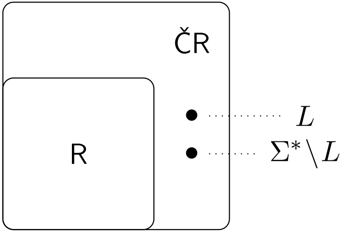
- pokud skončí přijetím simulace T_L, přijme w,
- pokud skončí přijetím simulace $T_{\Sigma^* \setminus L}$ zamítne w.

Takový stroj nebude nikdy cyklit a bude přijímat L. □

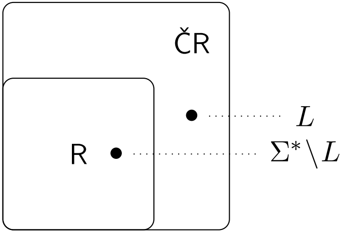
Poznámka

Taky pak platí, že $\Sigma^* \setminus L \in$ R.

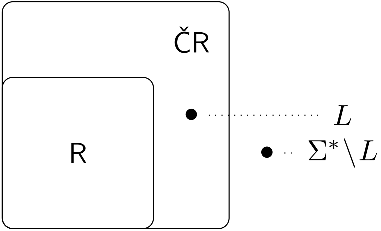
Jinými slovy (nebo spíše obrázkem), nemůže nastat tato situace



A taky nemůže nastat tato situace, protože R je uzavřená na doplněk.



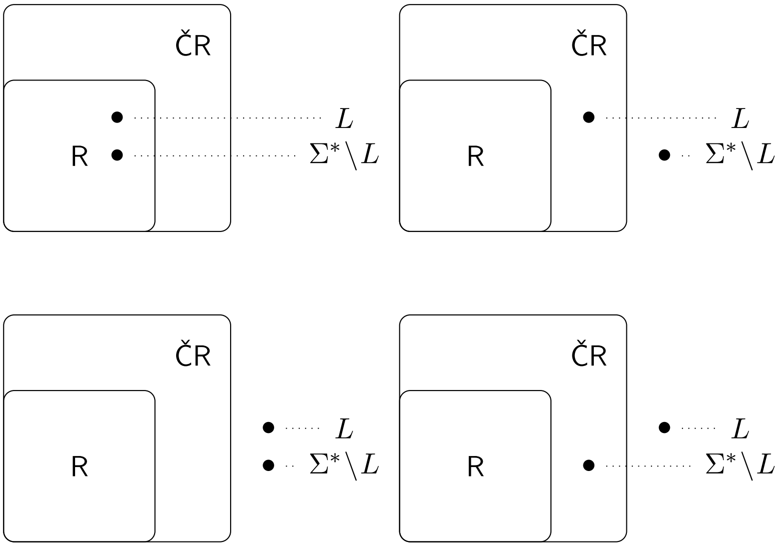
Pokud $L \in$ ČR a $L \notin$ R může nastat jenom následující:



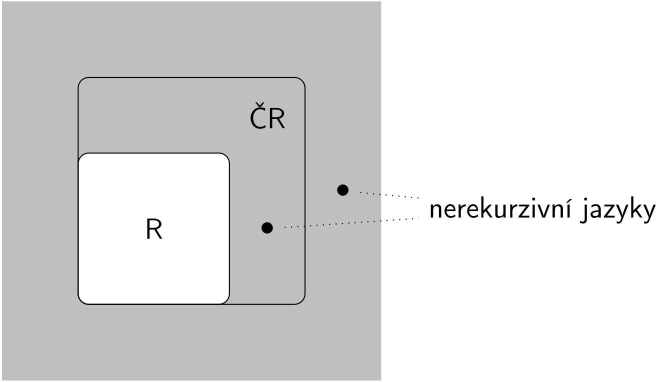
Důsledek

Pokud $L \in$ ČR a $L \notin$ R, pak $\Sigma^* \setminus L \notin$ ČR.

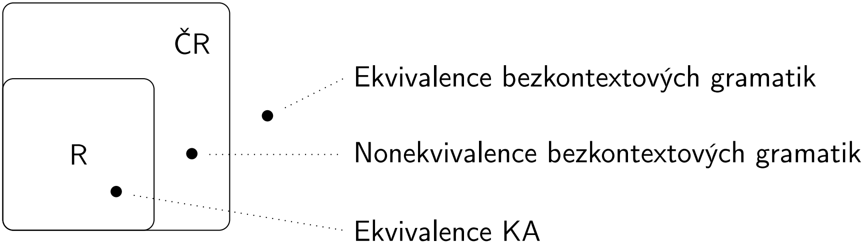
Jazyky TS a jejich doplňky



K názvosloví: neřešitelný problém, nerekurzivní problém.



Z PŘEDNÁŠKY 1 známe pár příkladů (zatím tomu jenom věříme).



Jazyky, které jsou částečně rekurzivní, ale nejsou rekurzivní

Definice

Univerzální jazyk L_U je definován takto:

$$L_U = \{[T, w] \mid T \text{ je TS, který přijímá } w\}.$$

Definice

Problém přijetí slova Turingovým strojem je definován jako:

Problém přijetí
Instance: T, w, kde T je TS a w je slovo nad jeho vstupní abecedou. **Otázka:** *Přijme TS* T *slovo* w*?*

Poznámka

Je to to samé.

Lemma

L_U je částečně rekurzivní.

Důkaz.

Univerzání TS ho přijímá. $\square$

Lemma

L_U není rekurzivní.

(důkaz na další stránce)

Důkaz.

Sporem: předpokládejme, že rekurzivní je. A tedy existuje TS U který rozhoduje L_U.
Sestavíme následující TS D:
TS D pro $[T]$, kde T je TS:

1. Spustí U pro $[T, [T]]$,
   pokud
   - U přijme $[T, [T]]$, D zamítne.
   - U zamítne $[T, [T]]$, D přijme.

Zjevně tento stroj nikdy necyklí.
Co se stane když stroji D dáme na vstup jeho vlastní kód $[D]$?

Předpokládejme, že $[D] \in L(D)$:
D pro $[D]$: spustí U pro $[D, [D]]$, ten přijme, protože $[D] \in L(D)$, a D zamítne. A tedy $[D] \notin L(D)$. **SPOR**

Předpokládejme, že $[D] \notin L(D)$:
D pro $[D]$: spustí U pro $[D, [D]]$, ten zamítne, protože $[D] \notin L(D)$, a D přijme. A tedy $[D] \in L(D)$. **SPOR** $\square$

Definice

Problém zastavení Turingova stroje je definován jako:

Problém zastavení
Instance: T, w, kde T je TS a w je slovo nad jeho vstupní abecedou.
Otázka: *Zastaví TS T pro slovo w?*

Totéž jako jazyk:

Definice

Jazyk L_{HALT} je definován takto:

$$L_{\mathsf{HALT}} = \{[T, w] \,|\, T \text{ je TS, který zastaví pro } w\}.$$

Poznámka

Napohled skoro totéž jako L_u.

Věta

$L_{HALT} \notin R$, $L_{HALT} \in \check{C}R$.

Idea důkazu.

V podstatě stejné jako v případě L_U. $\square$

Jak převést jeden problém na druhý (a naopak)? NA TABULI.

Poznámka

Tomuto principu se říká *redukce*, budeme se jím zabývat na PŘEDNÁŠCE 5.

Věta

L_U je částečně rekurzivní jazyk, který není rekurzivní.

Důkaz.

Z předchozích dvou lemmat. □

Důsledek

Třída rekurzivních jazyků je vlastní podtřídou částečně rekurzivních jazyků.

Důkaz.

$L_U \in$ ČR $\setminus$ R. □

Definice

$$L_{NE} = \{[T] \mid \ L(T) \neq \emptyset \ \}$$

A jako problém:

Definice

Problém 'neprázdnosti' jazyka Turingova stroje je definován jako:

Problém 'neprázdnosti' jazyka
Instance: T, kde T je TS.
Otázka: *Přijme TS T alespoň jedno slovo?*

Věta

$$L_{NE} \in \check{C}R, L_{NE} \notin R.$$

Idea důkazu (první části).

Setavíme TS, který bude (stejnou fintou jako u enumeratoru, který byl ekvivalentní TS) zkoušet spouštět T pro všechna slova, jakmile bude jedno přijato, přijme. $\square$

Důkaz (druhé části).

(sporem) Předpokládejme, že existuje takový TS T_{NE}, který rozhoduje L_{NE}.
Nejdříve si uveďme následující TS:

TS $S_{T,w}$ pro x

1. *porovná x a w, pokud jsou různé, zamítne.*
2. *pak spustí T pro w, pokud*
   - *T přijal w, $S_{T,w}$ přijme x.*
   - *T zamítl w, $S_{T,w}$ zamítne x.*

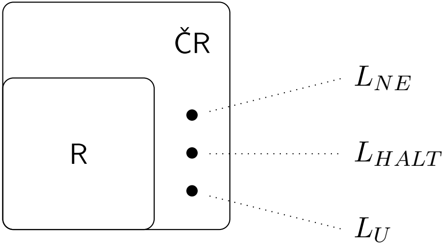
Sestrojíme následující TS U:

TS U pro $[T, w]$, kde T je TS a w je vstup pro T:

1. *Sestaví TS $S_{T,w}$;*
2. *Spustí T_{NE} pro $[S_{T,w}]$ pokud*
   - *T_{NE} přijal $[S_{T,w}]$, U přijme $[T, w]$.*
   - *T_{NE} zamítl $[S_{T,w}]$, U zamítne $[T, w]$.*

No jo, ale U nám teď rozhoduje L_U. **SPOR**. □

Shrnutí předchozích 9 slajdů



Jazyky, které nejsou částečně rekurzivní

Definice

Diagonální jazyk L_d je definován jako

$$L_d = \{[T] \mid \ T \text{ je TS, který nepřijímá svůj kód.}\}$$

Věta

L_d není částečně rekurzivní.

Důkaz.

Sporem. Předpokládáme, že existuje TS D, který ho přijímá. Patří $[D]$ do L_d?

Pokud $[D] \in L_d$, pak D nepřijímá $[D]$, pak ale $[D] \notin L(D) = L_d$. **SPOR**

Pokud $[D] \notin L_d$, pak D přijímá $[D]$, pak ale $[D] \in L(D) = L_d$. **SPOR**

□

Jiný důkaz téhož.

Důkaz.

Protože TS lze zakódovat do řetězců a řetězce lze očíslovat (jsou spočetné, existuje bijekce na $\mathbb{N}$), můžu seřadit stroje podle jejich kódů.
Můžu tedy uvažovat tabulku, jejíž řádky budou TS, sloupce budou kódy TS, tak aby když je v i-tém řádku TS T_i, tak v i-tém sloupci $[T_i]$.

	$[T_1]$	$[T_2]$	$[T_3]$	$[T_4]$	$\dots$
T_1	1				
T_2			1		
T_3		1			
T_4				1	
$\vdots$					

Tabuka obsahuje 1 na pozici $\langle i, j\rangle$ pokud T_i přijímá $[T_j]$. Pokud existuje TS D rozhodující L_d, musí být někde v té tabulce, řekněme na řádku x.
Co ale bude na pozici $\langle x, x\rangle$?
Ta hodnota se musí sama od sebe lišit. **SPOR** $\square$

Odsud název „diagonální jazyk“.

Ještě jednou důkaz toho, že $L_U \notin$R

Důkaz.

Sporem: předpokládejme, že rekurzivní je. A tedy existuje TS U který rozhoduje L_U.
Sestavíme následující TS D:
TS D pro $[T]$, kde T je TS:

1. Spustí U pro $[T, [T]]$,
   pokud
   - U přijme $[T, [T]]$, D zamítne.
   - U zamítne $[T, [T]]$, D přijme.

Takto sestrojený TS rozhoduje D. **SPOR.** □

Jazyk Turingových strojů přijímajících prázdný jazyk

Definice

$L_\emptyset = \{[T] \mid\ T$ je TS a $L(T) = \emptyset\}$.

Resp, jako problém

Problém odpovídající jazyku $L_\emptyset$
Instance: TS T
Otázka: *Nepřijímá TS T žádné slovo?*

Věta

$L_\emptyset \notin$ *ČR.*

Idea důkazu.

Dá se ukázat, že jeho doplněk je v ČR (vlastně už jsme dokázali). □

Jazyk Turingových strojů, které se nezacyklí

Definice

$L_{nocycle} = \{[T] \mid T$ je TS a necyklí pro žádné slovo.$\}$.

Resp, jako problém

Problém odpovídající jazyku $L_{nocycle}$
Instance: TS T
Otázka: *Necyklí TS T žádné slovo?*

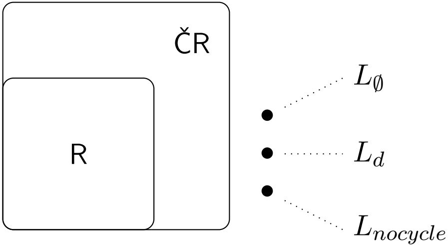
Věta

$L_{nocycle} \notin$ *ČR.*

Idea důkazu.

Podobný vztah jako mezi L_U a L_{HALT}. □

Shrnutí předchozích 6 slajdů



MAKE A SOFTWARE TO RECOGNIZES
'HELLO WORLD' PROGRAMS

input → SOFTWARE → YES

SOFTWARE → NO

BITCH PLEASE, NOONE CAN DO THAT

$L_{hello} = \{[E] \mid E$ je enumerator a $L(E) = \{$"hello world"$\}$ a zastaví$\}$

Definice

Jazyk HALT_{LBA} je definován takto.

$$\mathrm{HALT}_{\mathsf{LBA}} = \{[M, w] \mid M \text{ je LBA, který zastaví pro } w\}.$$

Věta

Jazyk HALT_{LBA} *je rekurzivní.*

Důkaz.

Náznak: stačí sestrojit TS, který simuluje činnost LBA a navíc počítá simulované kroky. Protože LBA má pro použití konečný pevně daný počet políček pásky, které může pro zpracování w použít, existuje konečný počet konfigurací, ve kterých se může nacházet. Pokud je výpočet delší, než tento počet, LBA cyklí (musel být v nějaké konfiguraci alespoň dvakrát). TS, který simuluje činnost LBA může tedy snadno detekovat zacyklení. □

Jako důsledek této věty dostáváme následující větu:

Věta

Každý jazyk přijímaný LBA je rekurzivní.

Důkaz.

Nechť X je TS, t.ž. $L(X) = \mathrm{HALT}_{\mathsf{LBA}}$ a L je jazyk přijímaný LBA A. Sestrojíme následující TS:

TS M_{LBA} pro vstupní slovo w:

1. *spustí TS X pro vstupní slovo $[A, w]$, pokud X zamítne $[A, w]$, M_{LBA} zamítne w.*
2. *simuluje činnost A pro w; pokud A přijme w, pak M_{LBA} přijme w, jinak M_{LBA} zamítne w.*

$\square$