Dokazování neřešitelnosti, redukce problémů, Riceova věta

Jan Konečný

22. října 2013

Shrnutí předchozích přednášek

Jak ukázat že $L \in \text{R}$:

- sestavit TS, který ho rozhoduje.

Jak ukázat že $L \in \text{ČR}$:

- sestavit TS, který ho přijímá.

Jak ukázat že $L \notin \text{R}$:

- (známe pár individuálních důkazů).

Jak ukázat že $L \notin \text{ČR}$:

- (známe pár individuálních důkazů).

Redukce

Připomínka z PŘEDNÁŠKY 4

Důkaz, že $L_U \notin R$:

Důkaz.

Sporem: předpokládejme, že rekurzivní je. A tedy existuje TS U který rozhoduje L_U.
Sestavíme následující TS D:
TS D pro $[T]$, kde T je TS:

1. Spustí U pro $[T, [T]]$,
   pokud
   - U přijme $[T, [T]]$, D zamítne.
   - U zamítne $[T, [T]]$, D přijme.

Takto sestrojený TS D rozhoduje L_d. **SPOR.** □

Co jsme vlastně udělali:

- Převedli jsme L_U na L_d.
- konstatovali jsme, že pokud bychom mohli rozhodovat původní problém, mohli bychom i rozhodovat ten, na který jsme ho převedli.
- došli jsme ke sporu.

Definice

Nechť $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$. Vyčíslitelné zobrazení $r : \Sigma^* \to \Sigma^*$ nazýváme *redukce* L_1 na L_2, pokud platí:

$$w \in L_1 \text{ právě když } r(w) \in L_2.$$

Pokud taková redukce existuje, říkáme, že L_1 je redukovatelný na L_2.

Značíme $L_1 \leq_{\mathsf{r}} L_2$.

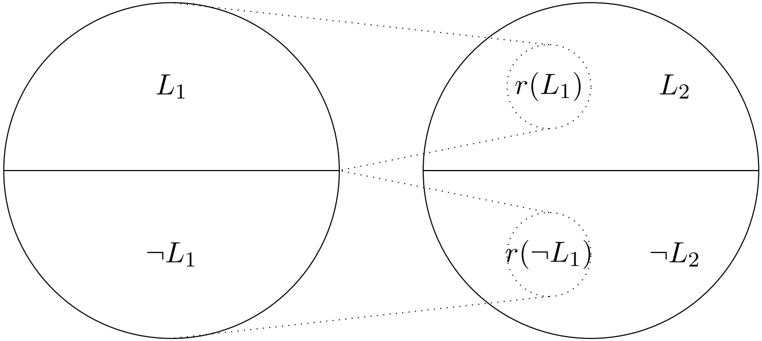
Poznámka

Obvykle se spíše hovoří o redukci problémů:

Nechť $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2$ jsou problémy. Vyčíslitelné zobrazení $r : \Sigma^* \to \Sigma^*$ nazýváme *redukce* $\mathcal{P}_1$ na $\mathcal{P}_2$, pokud platí:

$$w \in \mathcal{P}_1 \text{ právě když } r([w]) \in \mathcal{P}_2$$

Grafické znázornění redukce



Věta

Nechť $L_1, L_2 \in \Sigma^*$ *a* $L_1 \leq_r L_2$. *Pak platí:*

- *Pokud* $L_2 \in$ *R, pak* $L_1 \in$ *R.*
- *Pokud* $L_2 \in$ *ČR, pak* $L_1 \in$ *ČR.*

Důkaz.

Nechť TS T_2 rozhoduje L_2. Nechť TS R vyčisluje redukci L_1 na L_2. TS T_1, který rozhoduje L_1 sestrojíme takto:

TS T_1 *pro* w

1. *spustí* R *pro* w, *obdržíme* $r(w)$,
2. *spustí* T_2 *pro* $r(w)$, *pokud* T_2 *přijme,* T_1 *přijme; pokud* T_2 *zamítne,* T_1 *zamítne.*

Pro druhou část podobně. □

Co lze na co redukovat?

Ta věta je nahouby (proč?)

Jak ukázat že $L \in R$:

- sestavit TS, který ho rozhoduje.
- ukázat, že je redukovatelný na nějaký jazyk v R.

Jak ukázat že $L \in$ ČR:

- sestavit TS, který ho přijímá.
- ukázat, že je redukovatelný na nějaký jazyk v ČR.

Jak ukázat že $L \notin R$:

- (známe pár individuálních důkazů).

Jak ukázat že $L \notin$ ČR:

- (známe pár individuálních důkazů).

Věta

Nechť $L_1, L_2 \in R$ *a* L_1 *je redukovatelný na* L_2*. Pak platí:*

- *Pokud* $L_1 \notin$ *R, pak* $L_2 \notin$ *R.*
- *Pokud* $L_1 \notin$ *ČR, pak* $L_2 \notin$ *ČR.*

Teď už se to dá použít k dokazování neřešitelnosti.

Idea důkazu.

$A \Rightarrow B$ je totéž jako $\neg B \Rightarrow \neg A$.

A tak to přímo vyplývá z předchozí věty. □

Teď už to není nahouby

Jak ukázat že $L \in R$:

- sestavit TS, který ho rozhoduje.
- ukázat, že je redukovatelný na nějaký jazyk v R.

Jak ukázat že $L \in$ ČR:

- sestavit TS, který ho přijímá.
- ukázat, že je redukovatelný na nějaký jazyk v ČR.

Jak ukázat že $L \notin R$:

- ukázat, že jiný nerekurzivní jazyk na něj lze redukovat.

Jak ukázat že $L \notin$ ČR:

- ukázat, že jiný jazyk, který není částečně rekurzivní, na něj lze redukovat.

Ukázka použití

Příklad

Důkaz, že $L_u \notin$ R.

$$L_u = \{[T, w] \mid \text{TS } T \text{ přijímá } w\}$$

Víme, že $\Sigma^* \setminus L_d \notin$ R.

Redukce: $r([T]) = [T, [T]]$ (zjevně $[T, [T]] \in L_u$ p.k. $[T] \in \Sigma^* \setminus L_d$).
Podle věty od redukci dostáváme $L_u \notin$ R.

Příklad

Problém zastavení: redukce predvedena na PŘEDNÁŠCE 3.

(zopakovat na TABULI)

Zkusme si to (jakože cvičení)

Příklad

Zatřiďte následující jazyky:

- $L_\varepsilon = \{[T] \mid T$ je TS a $\varepsilon \in L(T)\}$.
- $L_{eq} = \{[T_1, T_2] \mid T_1, T_2$ jsou TS a $L(T_1) = L(T_2)\}$.
- $L_1 = \{[T] \mid T$ je TS a $|L(T)| = 1\}$.
- $L_c = \{[T_1, T_2] \mid T_1, T_2$ jsou TS a $L(T_1) \cap L(T_2) = \emptyset\}$.
- $L_{<5} = \{[T] \mid T$ je TS a $|L(T)| < 5\}$.
- $L_L = \{[T] \mid T$ je TS a $L(T) = L\}$.

Riceova věta

Pozorování

- $L_\varepsilon = \{[T] \mid T \text{ je TS a } \epsilon \in L(T) \}$.
- $L_1 = \{[T] \mid T \text{ je TS a } |L(T)| = 1 \}$.
- $L_{<5} = \{[T] \mid T \text{ je TS a } |L(T)| < 5 \}$.
- $L_L = \{[T] \mid T \text{ je TS a } L(T) = L \}$.
- $L_\emptyset, \dots$

Společné vlastnosti těchto jazyků?

Pozorování

- $L_\varepsilon = \{[T] \mid T \text{ je TS a } \epsilon \in L(T)\}$.
- $L_1 = \{[T] \mid T \text{ je TS a } |L(T)| = 1\}$.
- $L_{<5} = \{[T] \mid T \text{ je TS a } |L(T)| < 5\}$.
- $L_L = \{[T] \mid T \text{ je TS a } L(T) = L\}$.
- $L_\emptyset$, ...

Společné vlastnosti těchto jazyků?

- slova jsou kódy TS,
- zajímáme se o vlastnosti jazyků (nikoli TS),
- jsou netriviální,
- **nejsou rekurzivní**.

Věta (Riceova)

Nechť L je jazyk, jehož slova jsou kódy TS, a platí

- *pokud* $L(T_1) = L(T_2)$, *pak* $[T_1] \in L \Leftrightarrow [T_2] \in L$.
- $\exists T_1, T_2$ *t.ž.* $[T_1] \in L, [T_2] \notin L$.

L *není rekurzivní.*

Ukažte, že obě podmínky z Riceovy věty jsou nutné (minicviko).

Idea důkazu: ukážeme, že $L_U \leq_{\mathsf{r}} L$.

Důkaz.

Předpokládejme,

- že TS $[T_\emptyset] \notin L$; $L(T_\emptyset) = \emptyset$ (kdyby ne, můžeme toto ukázat pro $\Sigma^* \setminus L$ a použít výsledky z PŘEDNÁŠKY 2).
- že TS $[S] \in L$ (musí existovat z podmínek v Riceově větě).

Nejdříve uveďme následující TS:

TS $H_{\langle T,w\rangle}$ pro x

- *spustí T pro w, pokud přijme pokračuje dalším bodem, jinak cyklí.*
- *chová se jako S pro x.*

$$L(H_{\langle T,w\rangle}) = \begin{cases} L(S) & \text{pokud } w \in L(T) \\ \emptyset & \text{jinak.} \end{cases}$$

$r : [T, w] \mapsto [H_{\langle T,w\rangle}]$ je naše redukce. □

Turingovská redukovatelnost

Redukce, kterou jsme uvedli předtím nepokrývá intuitivní pojem redukovatelnosti v obecném smyslu.
Např. uvažme: L_u a $\neg L_u$; Víme, že stačí vědět, že $L_u \in$ ČR $\setminus$ R, a z toho hned dostaneme $\neg L_u \notin$ ČR.

Teď uvedeme velmi obecný pojem redukovatelnosti: Turingovská redukovatelnost.

Definice

Orákulum pro jazyk B je „externí zařízení", které je schopné odpovědět, jestli $w \in B$. *Oráklový TS* je TS, používající orákulum jako modul.

Nebude nás zajímat jak to orákulum dělá... prostě magie.

Definice

Jazyk A je *Turingovsky redukovatelný* na jazyk B, psáno $A \leq_{\mathsf{T}} B$, pokud A je rozhodovaný relativně k B.

Věta

Pokud $A \leq_{\mathsf{T}} B$ a B je rozhodovaný, pak A je rozhodovaný.

Důkaz.

Pokud B je rozhodovaný, pak můžeme nahradit orákulum pro B strojem, která rozhoduje B. A tedy oráklový TS pro A můžeme nahradit běžným TS, který rozhoduje A. $\square$