Postův problém přiřazení a jeho aplikace

Jan Konečný

29. října 2013

Konečný zas po ránu něco chce

Najděte neprázdnou konečnou sekvenci prvků z následující množiny tak, aby konkatenace horních částí byla totožná s konkatenací dolních částí (samozřejme se ty prvky mohou i opakovat). „Nalezení shody“.

$$\left\{ \left[\frac{\mathsf{b}}{\mathsf{ca}}\right], \left[\frac{\mathsf{a}}{\mathsf{ab}}\right], \left[\frac{\mathsf{ca}}{\mathsf{a}}\right], \left[\frac{\mathsf{abc}}{\mathsf{c}}\right] \right\}$$

Konečný zas po ránu něco chce

Najděte neprázdnou konečnou sekvenci prvků z následující množiny tak, aby konkatenace horních částí byla totožná s konkatenací dolních částí (samozřejme se ty prvky mohou i opakovat). „Nalezení shody“.

$$\left\{ \left[\frac{\mathsf{b}}{\mathsf{ca}}\right], \left[\frac{\mathsf{a}}{\mathsf{ab}}\right], \left[\frac{\mathsf{ca}}{\mathsf{a}}\right], \left[\frac{\mathsf{abc}}{\mathsf{c}}\right] \right\}$$

Řešení:

$$\left[\frac{\mathsf{a}}{\mathsf{ab}}\right] \left[\frac{\mathsf{b}}{\mathsf{ca}}\right] \left[\frac{\mathsf{ca}}{\mathsf{a}}\right] \left[\frac{\mathsf{a}}{\mathsf{ab}}\right] \left[\frac{\mathsf{abc}}{\mathsf{c}}\right]$$

V některých sadách nelze shodu najít.

$$\left\{\left[\frac{\mathsf{abc}}{\mathsf{ab}}\right], \left[\frac{\mathsf{ca}}{\mathsf{a}}\right], \left[\frac{\mathsf{acc}}{\mathsf{ba}}\right]\right\}$$

Ne vždy to lze snadno poznat.

Postův problém přiřazení (PPP)
Instance: S – sada 'domina'   **Otázka:** Existuje v S shoda?

Věta

PPP je neřešitelný.

Idea důkazu.

Ukážeme, že $L_U \leq_\mathsf{r}$ PPP. A to tak, že sestavíme sadu domina tak, aby konkatenované řetězce odpovídaly historii výpočtu TS T nad w. $\square$

Idea důkazu přesněji.

Ukážeme, že

- $L_U \leq_{\mathsf{r}}$ PPPi,
- PPPi $\leq_{\mathsf{r}}$ PPP.

$\square$

Tohle je asi jasné:

Věta

$\leq_r$ je tranzitivní a reflexivní.

Pro studenty: ukažte, že není

- antisymetrická,
- symetrická

Postův problém přiřazení s inicializací (PPPi)
Instance: S – sada 'domina', $d \in S$ – inicializační domino **Otázka:** Existuje v S shoda, která začíná na d?

Lemma

$L_U \leq_r$ *PPPi.*

Idea důkazu.

k $\langle T, w \rangle$ sestavíme sadu a inicializační domino tak, aby v ní existovala shoda právě když TS T přijímá w.
A to takto:

- inicializační domino bude odpovídat iniciální konfiguraci v dolní části, a prázdná v horní části (téměř).
- další kostky budou odpovídat přechodové funkci δ.
- při přijímací konfiguraci zajistíme shodu.

□

Důkaz (část I.).

Předpokládáme, že TS T po sobě uklízí a nikdy se nepokusí přejet levý okraj pásky (z PŘEDNÁŠKY 2 víme jak to zařídit).
Pro $w = w_1 w_2 \dots w_n$ je iniciální konfigurace $C_0^w = q_0 w_1 w_2 \dots w_n$.
První domino sady S bude

$$\left[\frac{\#}{\# q_0 w_1 w_2 \dots w_n \#}\right].$$

$\#$ = oddělovač konfigurací. □

Důkaz (část II.).

Další kostky budou konstruovány tak, aby při „dorovnávání“ horní části, dostaneme v doní části konfiguraci, která se dá z předchozí odvodit jedním krokem výpočtu.

Pro všechny $a, b \in \Gamma$ a $q, r \in Q$, kde $q \neq q_-$:

$$\text{pokud } \delta(q, a) = (r, b, R), \text{ přidej } \left[\frac{qa}{br}\right] \text{ do } S.$$

Pro všechny $a, b, c \in \Gamma$ a $q, r \in Q$, kde $q \neq q_-$:

$$\text{pokud } \delta q, a = (r, b, L), \text{ přidej } \left[\frac{cqa}{rcb}\right] \text{ do } S.$$

Pro všechny $a \in \Gamma$:

$$\text{přidej } \left[\frac{a}{a}\right] \text{ do } S.$$

□

Důkaz (část III. a poslední).

Oddělovací domino, domino „generující ␣“, domino „odebírající ␣“:

$$\text{přidej } \left[\frac{\#}{\#}\right], \left[\frac{\#}{\textvisiblespace\#}\right], \left[\frac{\textvisiblespace\#}{\#}\right] \text{ do } S.$$

Domino řešící technický detail; pro všechny $q \in Q$

$$\text{přidej } \left[\frac{q}{q}\right] \text{ do } S.$$

Zakončovací domino:

$$\text{přidej } \left[\frac{q_{+}\#\#}{\#}\right] \text{ do } S.$$

A to je správná reducke – ověřit. □

Důsledek

PPPi není řešitelný.

Lemma

PPPi $\leq_r$ PPP.

Důkaz (část I.).

Nechť $u = u_1 u_2 \ldots u_n \in \Sigma^*$. Označme

$$*u = *u_1 * u_2 * \cdots * u_n,$$

$$u* = u_1 * u_2 * \cdots * u_n *,$$

$$*u* = *u_1 * u_2 * \cdots * u_n * .$$

$\square$

Důkaz (část II.).

Instanci S, d, kde $d = \left[\frac{t_1}{b_1}\right]$

$$\left\{ \left[\frac{t_1}{b_1}\right], \left[\frac{t_2}{b_2}\right], \left[\frac{t_3}{b_3}\right], \dots \left[\frac{t_k}{b_k}\right] \right\}$$

konvertujeme na

$$\left\{ \left[\frac{*t_1}{*b_1*}\right], \left[\frac{*t_1}{b_1*}\right], \left[\frac{*t_2}{b_2*}\right], \left[\frac{*t_3}{b_3*}\right], \dots \left[\frac{*t_k}{b_k*}\right], \left[\frac{*\diamond}{\diamond}\right] \right\}$$

Ověřit, že jde o redukci. $\square$

CVIČENÍ

- Ukažte, že všechny rekurzivní jazyky lze redukovat na L_U.
- Nechť

$$J = \{w \mid w = 0x \text{ pro } x \in L_U \text{ nebo } w = 1x \text{ pro } x \notin L_U\}.$$

  Ukažte, že J ani $\neg J$ nejsou částečně řešitelné.
- Uveďte příklad neřešitelného problému P, kde $P \leq_{\mathsf{r}} \neg P$.
- Nechť $S = \{[M] \mid M$ je TS, který přijímá w^r kdykoli přijímá $w\}$. Ukažte, že S není rekurzivní.
- **Zbytečný stav** v TS je stav, do kterého TS nikdy nevstoupí pro žádný vstup. Uvažujte problém testování, zda TS má nějaký zbytečný stav. Formulujte tento problém jako jazyk a ukažte, že není rekurzivní.
- Uvažujte problém testování, zda se TS někdy pokusí o posun přes levý okraj pásky. Formulujte tento problém jako jazyk a ukažte, že není rekurzivní.
- Uvažujte problém testování, zda se TS někdy provede (nebo se pokusí) o posun hlavou doleva. Formulujte tento problém jako jazyk a ukažte, že JE rekurzivní.

- Ukažte, že PPP je řešitelný, pokud je nad unární abecedou.
- Rozhodněte, zda

$$L = \{[T] |\ L(T) \text{ je podmnožina množiny sudých čísel } \}$$

  je rekurzivní. Usoudíte-li, že L není rekurzivní, rozhodněte, zda S či $\neg L$ je rekurzivně spočetná množina. Svá rozhodnutí zdůvodněte.
- Popište algoritmus, který vypíše prvky množiny $\neg L$, prvky sice vypisuje neuspořádaně a některé může vypsat i víckrát, ale potenciálně vypíše všechny prvky $\neg L$.

- Rozhodněte, zda množina

$$S = \{[T] \mid \text{existuje } c \in \Sigma^*, \text{ tž. pokud } T \text{ zastaví (pro lib. vstup),} \\ \text{má na pásce zapsáno } c\}$$

  je rekurzivní jazyk nebo ne.
- Ukažte, že doplněk množiny z předchozího příkladu je č. rekurzivní.
- Rozhodněte, zda je následující jazyk rekurzivní, své rozhodnutí zdůvodněte.

$$L = \{[T, n] \mid \text{ TS } T \text{ přijme alepsoň jedno slovo během } n \text{ kroků. }\}$$

- Rozhodněte, zda množina

$$S = \{[T] \mid \exists x \in \Sigma^* \text{ t.ž. } L(T) = \{x\}\}$$

je rekurzivní, č. rekurzivní, doplněk č. rekurzivního jazyka, nebo ani jedno z toho. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- Nechť X je lib. TS, rozhodněte, zda množina

$$A = \{[T] \mid T \text{ je TS a } L(T) = L(X)\}$$

je částečně rekurzivní. Své rozhodnutí zdůvodněte.

- Nechť A je rekurzivní jazyk a B je libovolný jazyk, t.ž. $B, \neg B \neq \emptyset$. Ukaže, že $A \leq_{\mathsf{r}} B$.