

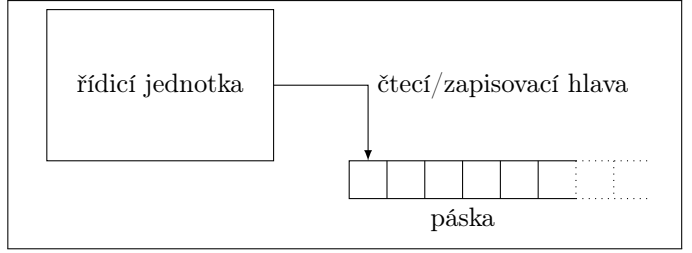
VCS – Přednáška 1

Turingovy stroje

Definition 1. Turingův stroj je dán:

1. neprázdnou konečnou množinou stavů Q ,
2. vstupní abecedou Σ , t.ž. $\epsilon \notin \Sigma$,
3. páskovou abecedou Γ , t.ž. $\epsilon \in \Gamma$,
4. přechodovou funkcí $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$,
5. počátečním stavem $q_{start} \in Q$,
6. přijímacím stavem $q_+ \in Q$,
7. zamítacím stavem $q_- \in Q$, t.ž. $q_- \neq q_+$.

Formálně budeme TS zapisovat jako strukturu $\langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{start}, q_+, q_- \rangle$.



Definition 2. Konfigurace TS $T = \langle Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{start}, q_+, q_- \rangle$ je uspořádaná trojice $(q, \alpha, n) \in Q \times \Gamma^* \times \mathbb{N}_0$.

- iniciální konfigurace TS T pro vstup $\omega \in \Sigma^*$ je $(q_{start}, \omega, 0)$; budeme ji označovat C_0^ω
- přijímací konfigurace TS T je konfigurace (q_+, α, n) , kde $\alpha \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}_0$. Libovolnou přijímací konfiguraci budeme označovat C^+ .
- zamítací konfigurace TS T je konfigurace (q_-, α, n) , kde $\alpha \in \Gamma^*, n \in \mathbb{N}_0$. Libovolnou zamítací konfiguraci budeme označovat C^- .

Konfiguraci, která je přijímací nebo zamítací říkáme také koncová konfigurace. Konfigurace, která není ani přijímací ani zamítací říkáme nekoncev konfigurace.

Remark 1. Alternativně budeme konfiguraci zapisovat jako řetěz $\alpha q \beta \in \Gamma^* Q \Gamma^*$. Analogicky s předchozím zápisem, konfigurace $\alpha q \beta$ a $\alpha q \beta_-$ považujeme za stejné.

Definition 3. Krok výpočtu TS je definován jako binární relace na množině konfigurací: Necht $(q, a_0 \dots a_n - 1, i)$ je taková konfigurace T , kde $q \neq q_\pm, n \in \mathbb{N}_0, a_1, \dots, a_n \in \Gamma, i \leq n$.

- (a) Je-li $1 \leq i \leq n$ a $\delta(q, a_i) = (q', b, L)$, pak $(q, a_0 \dots a_{n-1}, i) \vdash (q', a_0 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n - 1, i - 1)$.
- (b) Je-li $\delta(q, a_1) = (q', b, L)$, pak $(q, a_1 \dots a_n - 1, 0) \vdash (q', b a_2 \dots a_n - 1, 0)$.
- (c) Je-li $\delta(q, a_i) = (q', b, R)$, pak $(q, a_0 \dots a_{n-1}, i) \vdash (q', a_1 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n - 1, i + 1)$.

Definition 4. Výpočet $\vdash^*$ TS je reflexivní, tranzitivní uzávěr relace $\vdash$. Zápis $C \vdash^* C'$ jako: „konfigurace C' je odvoditelná z konfigurace C .“

Definition 5. Historie výpočtu TS T nad slovem ω je maximální posloupnost konfigurací $C_0, C_1, C_2, \dots$ TS T tak, že $C_0 = C_0^\omega$ a pro všechna $i \in \mathbb{N}$ platí $C_{i-1} \vdash C_i$.

Definition 6. Turingův stroj T přijímá $\omega \in \Sigma^*$, pokud je historie výpočtu TS T nad slovem ω konečná a končí přijímací konfigurací.

Turingův stroj T zamítá $\omega \in \Sigma^*$, pokud je historie výpočtu TS T nad slovem ω konečná a končí zamítací konfigurací.

Turingův stroj T cyklí pro slovo $\omega \in \Sigma^*$, pokud je historie výpočtu TS T nad slovem ω nekonečná.

Jazyky přijímané a jazyky rozhodované Turingovými stroji

Definition 7. Množinu všech slov $w \in \Sigma^*$, které TS T přijímá, značíme $L(T)$. Jazyk $L(T)$ nazýváme jazyk přijímaný TS T a říkáme, že TS T přijímá jazyk $L(T)$.

Pokud navíc platí, že TS T zamítá každé slovo, které nepatří do $L(T)$, nazýváme jazyk $L(T)$ jazyk rozhodovaný TS T a říkáme, že TS T rozhoduje jazyk $L(T)$.

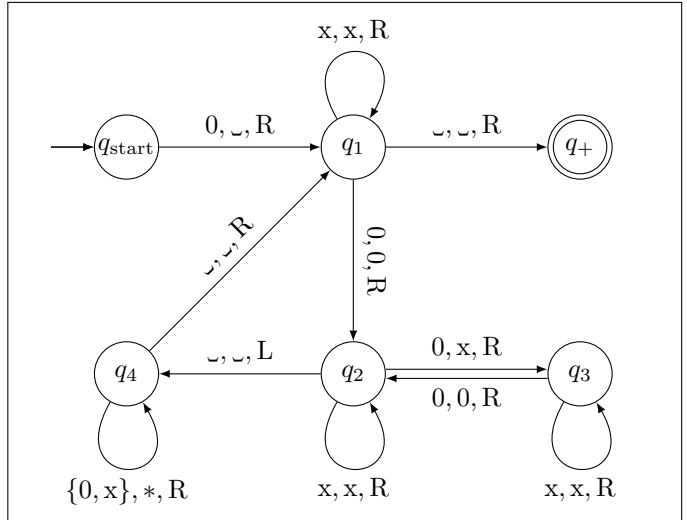
Definition 8. Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ nazveme jazyk rozhodovaný TS, pokud existuje TS T , který jej rozhoduje.

Jazyk $L \subseteq \Sigma^*$ nazveme jazyk přijímaný TS, pokud existuje TS T , který jej přijímá.

Definition 9. Necht $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ je funkce. Říkáme, že (deterministický) TS vyčísľuje funkci f , pokud pro každé vstupní slovo $w \in \Sigma^*$ zapíše na pásku $f(w)$ a skončí. Funkce f se nazývá vyčísľitelná, pokud existuje (deterministický) TS, který ji vyčísľuje.

Přechodový diagram TS

Přechody a stavy TS můžeme zakreslit do grafu, tzv. *přechodového diagramu* (podobně jako je tomu u konečných automatů nebo zásobníkových automatů). Přechodový diagram se skládá z množiny uzlů, která koresponduje s množinou Q stavů TS. Každá hrana vedoucí z uzlu q do uzlu p je nadepsána jednou nebo více položkami ve tvaru „ a, b, D “, kde $a, b \in \Gamma$ jsou páskové symboly a $D \in \{L, R\}$ je směr pohybu hlavy. Tyto položky odpovídají přechodům TS: položka $\langle a, b, D \rangle$ hrany vedoucí z uzlu q do uzlu p odpovídá přechodu $\delta(q, X) = (p, Y, D)$. Uzel odpovídající počátečnímu stavu q_{start} se označuje malou šipkou vedoucí do tohoto uzlu, Uzel odpovídající přijímajícímu stavu q_+ se označuje dvojitým ohraničením. Uzel odpovídající zamítacímu stavu q_- (a hrany do něj vedoucí) je obvyklé vůbec nezobrazovat a předpokládat, že všechny přechody, které nejsou zobrazeny v grafové reprezentaci, vedou do tohoto stavu.



Zakódování TS

V této kapitole demonstrujeme, jak by bylo možné zakódovat libovolný TS T do řetězce $[T]$. Existuje nekonečně mnoho způsobů jak zakódovat TS, my si uvedeme tento jeden:

neprázdná konečná množina stavů Q : Jelikož nezáleží na konkrétním označení jednotlivých stavů, předpokládejme, $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$. Množinu zakódujeme jako: 0^n , tedy řetěz nul o délce $n = |Q|$.

vstupní abeceda Σ a pásková abeceda Γ : Jelikož nezáleží na konkrétním označení jednotlivých symbolů, předpokládejme, $\Sigma = \{a_1, a_2, \dots, a_j\}$, $\Gamma = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Množinu Σ zakódujeme jako: 0^j , tedy řetěz nul o délce $m = |\Sigma|$ a množinu Γ zakódujeme jako: $0^{(m-j)}$, tedy řetěz nul o délce $j = |\Gamma| - |\Sigma|$.

přechodové funkce δ : Jednotlivé přechody $\delta(q_i, a_j) = (q_l, a_k, X)$ zakódujeme jako: $0^i 10^j 10^l 10^k 0^x$, kde $x = 1$, pokud $X = L$, a $x = 2$, pokud $X = R$. Celou přechodovou funkci pak zakódujeme jako zřetězení zakódování jednotlivých přechodů oddělených dvěma jedničkami 11.

počáteční stav q_{start} nekódujeme, uvažujeme $q_{\text{start}} = q_1$.

přijímací stav $q_+ \in Q$ zakódujeme jako 0^e tak že $q_+ = q_e$.

zamítací stav $q_- \in Q$ zakódujeme jako 0^f tak že $q_- = q_f$.

Zakódování celého TS je pak zřetězení všech jeho částí oddělených třemi jedničkami 111: tedy

$$[Q]111[\Gamma]111[\delta]111[q_+]111[q_-].$$

Dále budeme potřebovat zakódovat konfiguraci TS (q_l, α, n) . Zakódujeme stav q_l jako 0^l , α jako posloupnost zakódování jednotlivých symbolů α oddělených od sebe jednou jedničkou. Číslo n zakódujeme jako $0^{(n+1)}$. Celá konfigurace bude zakódována jako $[q_l]11[\alpha]11[n]$.

Značení $[\cdot]$ budeme používat pro zakódování čehokoli do řetězce nad vstupní abecedou TS.

Existence jazyků, které nejsou částečně rekurzivní

Všimněme si, že Turingův stroj je jen spočetné nekonečno, protože je možno kódovat do řetězců, kterých je spočetné nekonečno. Jazyků nad libovolnou abecedou je však nespočetně mnoho. To tedy znamená, že

- rekurzivních jazyků je nekonečně-krát méně, než nerekurzivních jazyků.
- částečně rekurzivních jazyků je nekonečně-krát méně, než jazyků, které nejsou ani částečně rekurzivní.
- pravděpodobnost, že náhodně vybraný problém bude (částečně) řešitelný, je 0.