

VCS – Přednáška 3

1 Enumerator

Enumerator je alternativa TS, která nemá žádný vstup, ale má navíc instrukci **print**, která, když je vyvolána vytiskne obsah pásky (až po první prázdný symbol). Jazykem enumeratoru rozumíme množinu všech slov, které vytiskne. Pro ilustraci viz Obrázek 1

Můžeme jej formalizovat třeba tak, že přechodová funkce bude mít tvar

$$\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{R, L\} \times \{\text{print}, \emptyset\}$$

nebo tak, že určíme množinu stavů, do kterých, když enumerator přejde, nastane **print**. Konkrétní formalizace nás zajímat nemusí. Důležitější pro nás bude fakt, že enumerator je výpočetně stejně silný jako klasický TS:

Theorem 1. *Nechť $L \subseteq \Sigma^*$ je jazyk.*

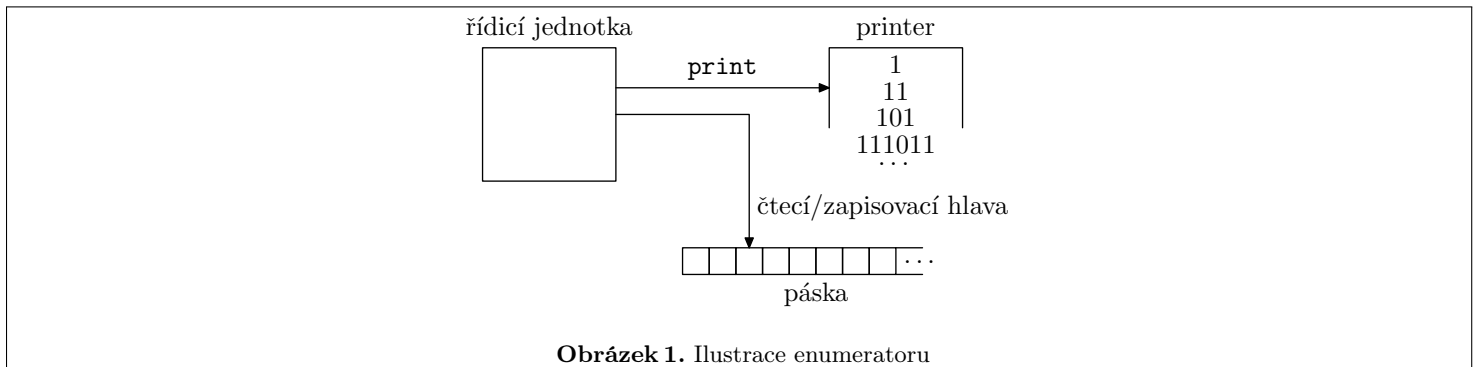
(a) *Jazyk L je rekurzivní, právě když existuje enumerator, který jej tiskne lexikografickém uspořádání.*

(b) *Jazyk L je částečně rekurzivní, právě když existuje enumerator, který jej tiskne.*

Připomínka 1 Lexikografické uspořádání¹ řetězců je uspořádání, ve kterém kratší řetězce předcházejí delším a řetězce stejné délky jsou uspořádány dle abecední pořadí.

Přesněji, máme-li abecedu Σ a nad ní definované úplné uspořádání $\leq_\Sigma$. Pak řetězec $a_1a_2 \dots a_n \in \Sigma^*$ je lexikograficky menší nebo roven $b_1b_2 \dots b_m \in \Sigma^*$, pokud

- $n < m$ nebo
- $n = m$ a existuje $k \in \{1, \dots, n\}$ tak, že pro všechna $i \in \{1, \dots, k-1\}$ platí, že $a_i = b_i$, a $a_k \leq_\Sigma b_k$.



Obrázek 1. Ilustrace enumeratoru

Neřešitelné problémy

1.1 Jazyky, které nejsou částečně rekurzivní

Diagonální jazyk L_D je definován následovně

$$L_D = \{[M] \mid M \text{ je TS, který nepřijímá } [M]\}$$

Slovy, L_D je jazyk Turingových strojů, které nepřijímají vlastní kód.

Theorem 2. L_D není částečně rekurzivní.

Theorem 3. Jazyk $L_\emptyset = \{[M] \mid M \text{ je TS, t.ž. } L(M) = \emptyset\}$ není částečně rekurzivní.

¹ Správně by toto mělo být nazýváno kvazi-lexikografické uspořádání.

1.2 Jazyky, které jsou částečně rekurzivní, ale nejsou rekurzivní

V představíme dva modelové zástupce jazyků, které jsou částečně rekurzivní, ale nejsou rekurzivní – univerzální jazyk, a jazyk HALT ².

Univerzální jazyk L_U je definován takto:

$$L_U = \{[M, w] \mid M \text{ je TS, který přijímá } w\}.$$

Theorem 4. L_U není rekurzivní.

Theorem 5. Jazyk L_U je částečně rekurzivní.

Jazyk HALT je definován takto:

$$\text{HALT} = \{[M, w] \mid M \text{ je TS, který zastaví pro } w\}.$$

Theorem 6. Jazyk HALT není rekurzivní.

Theorem 7. Jazyk HALT je částečně rekurzivní.

Vlastnosti třídy rekurzivních a částečně třídy rekurzivních jazyků

Theorem 8. Třída rekurzivních jazyků je uzavřená na konečný průnik, konečné sjednocení, doplněk, konkatenci, a Kleeneho uzávěr.

Theorem 9. Třída částečně rekurzivních jazyků je uzavřená na konečný průnik, konečné sjednocení, konkatenci, a Kleeneho uzávěr.

Theorem 10. Pokud jsou L a $\neg L$ částečně rekurzivní jazyky, pak L je rekurzivní jazyk.

² V kontextu rozhodovacích problémů se tyto nazývají *problém přijetí TS* a *problém zastavení TS*